Существование и единственность решения задачи Коши

Сформулируем и докажем основную теорему о существовании и единственности локального решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (см. определения 4.1.1 и 4.1.2.) Приведем доказательство теоремы Коши в ее общем варианте.

Теорема 4.3.1 (Коши)

Пусть в области $G \subseteq E^{n+1}$ вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$

- **непрерывна;**
- **на каждом компакте в области G удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица равной L.**

Тогда $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ найдется $\delta > 0$ такое, что на отрезке $[\, x_0 - \delta,\ x_0 + \delta \,]$ существует и притом единственное решение задачи Коши:

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})\,, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0\,.$$

Доказательство.

1°. Согласно определению нормы для любого замкнутого и ограниченного множества $\overline{Q} \subseteq G$ существуют числа $M > 0$ и $L > 0$ такие, что

$$\left\langle \vec{f}(x,\vec{y}) \right\rangle \leq M \quad \forall \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{y} \end{matrix} \right\| \in \overline{Q},$$

поскольку вектор-функция $\vec{f}(x,\vec{y})$ непрерывна в $\overline{Q}$ и

$$\left\langle \vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{z}) \right\rangle \leq L \left\langle \, \vec{y} - \vec{z} \, \right\rangle \quad \forall \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{y} \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} x \\ \vec{z} \end{matrix} \right\| \in \overline{Q} \; ,$$

так как $\vec{f}(x,\vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица.

2°. Рассмотрим в E^{n+1} замкнутый цилиндр

$$\overline{Q}_r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \in [\, x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r \,] \, , \\ \langle \, \vec{y} - \vec{y}_0 \rangle \leq r \; . \end{array} \right\}$$

В последней формуле пусть параметр

$$\delta_r = \frac{r}{M + Lr},$$

а положительное r возьмем, в свою очередь, настолько малым, чтобы $\overline{Q}_r \subset G$.

Геометрическая интерпретация сделаного выбора параметров для $n = 1$ показана на рис. 4.2.

3°. На множестве X_r – вектор-функций непрерывно дифференцируемых на отрезке $[\, x_0 - \delta_r,\, x_0 + \delta_r \,]$, построим оператор, действие которого определяется формулой

$$\widehat{\Phi}\, \vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du\ . \tag{4.3.1}$$

Тогда система интегральных уравнений (4.1.3) может быть записана в виде $\vec{y}(x) = \widehat{\Phi}\ \vec{y}(x)$.

4°. Покажем, что этот оператор является сжимающим на замкнутом шаре радиуса r и с центром на элементе $\vec{y}_0$

$$\overline{U}_r(\vec{y}_0) \equiv \left\{ \vec{y} \in X_r \ : \ \ \langle\, \vec{y} - \vec{y}_0 \rangle \leq r \right\} \,.$$

Действительно, в силу определения нормы, леммы 4.3.1 и условия Липшица справедлива оценка

$$\left\langle\, \widehat{\Phi}\vec{y}(x) - \widehat{\Phi}\vec{z}(x) \,\right\rangle \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left\langle\, \vec{f}(u, \vec{y}(u)) - \vec{f}(u, \vec{z}(u)) \right\rangle \, du \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L \,\langle\, \vec{y}(u) - \vec{z}(u) \rangle \ du \right| \leq \delta_r L \,\langle\, \vec{y}(x) - \vec{z}(x) \rangle \ .$$

Сжимаемость следует из очевидного неравенства для коэффициента сжатия

$$q_r = \delta_r L = \frac{Lr}{M + Lr} < 1 \ .$$

5°. С другой стороны, в силу леммы 4.3.1 и ограниченности вектор-функции $\vec{f}(x,\vec{y})$ имеем

$$\left\langle\ \widehat{\Phi}\vec{y}_0-\vec{y}_0\ \right\rangle \leq \left|\ \int\limits_{x_0}^{x}\left\langle\ \vec{f}(u,\vec{y}_0)\right\rangle\,du\right| \leq \delta_r M=(1-q_r)r\,.$$

Последняя оценка вытекает непосредственно из включения $x \in [x_0-\delta_r, x_0+\delta_r]$ и формулы $\delta_r=\dfrac{r}{M+Lr}$.

Действительно,

$$\delta_r M=\frac{M}{M+Lr}r=\frac{M+Lr-Lr}{M+Lr}r=\left(1-\frac{Lr}{M+Lr}\right)r=(1-q_r)\,r\,,$$

поскольку ранее мы нашли, что

$$q_r=\delta_r L=\frac{Lr}{M+Lr}\,.$$

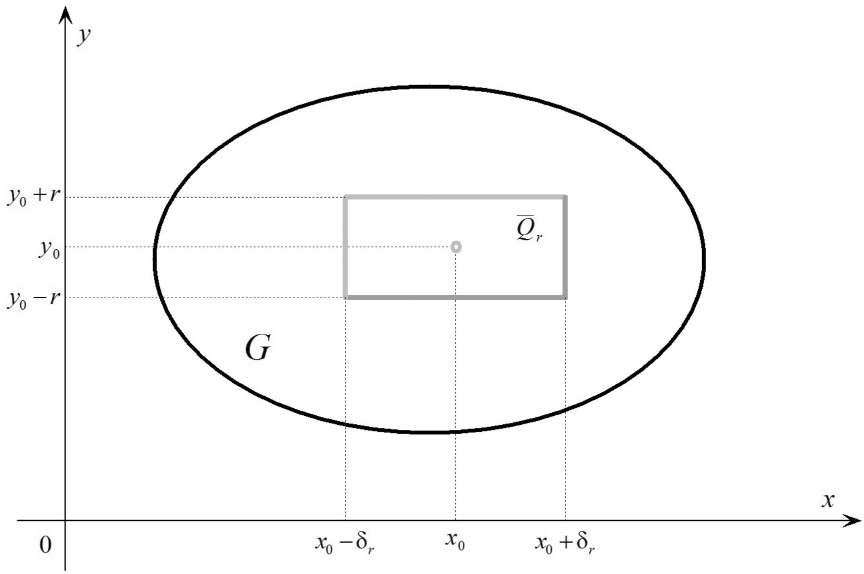

Рис. 1. К доказательству тонремы Коши

6°. Согласно теореме 4.2.1 (принцип сжимающих операторов) оператор

$$\widehat{\Phi}\,\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\,du\ .$$

имеет в шаре $\overline{U}_r(\vec{y}_0)$ неподвижную точку $\vec{y}^{\,*}(x)$, являющуюся единственным решением уравнения

$$\vec{y}^{\,*}(x) = \widehat{\Phi}\ \vec{y}^{\,*}(x),$$

которая в следствие равносильности (теорема 4.1.1) задач:

$$\vec{y}^{\,\prime}(x) = \vec{f}\,(x, \vec{y}(x))\,; \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

и

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\,du\ ,$$

есть решение исходной задачи Коши (4.1.1) – (4.1.2).

Следствие 4.3.1 **Утверждение теоремы 1.1.1 справедливо.**

Доказательство.
Покажем, что, если вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$ (с координатным представлением $\| \, f_1(\vec{x}) \, f_2(\vec{x}) \, \ldots \, f_n(\vec{x}) \, \|^{\mathrm{T}}$) $\vec{x} \in E^n$ непрерывно дифференцируема в выпуклой, замкнутой и ограниченной области G, то она удовлетворяет условию Липшица.

Из курса математического анализа известно (лемма Адамара), что $\forall \vec{y},\ \vec{z} \in G \quad \exists \, \vec{\xi}_{(k)} = \lambda_{(k)} \vec{y} + (1 - \lambda_{(k)}) \vec{z},\ \lambda_{(k)} \in [0, 1]$, для которого

$$f_k(\vec{y}) - f_k(\vec{z}) = \Big(\mathrm{grad} f_k(\vec{\xi}_{(k)}), \vec{y} - \vec{z} \Big) \quad \forall k = [1, n] \, .$$

В этом случае $\vec{\xi}_{(k)}$ принадлежит отрезку в G, соединяющему $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

Тогда в силу неравенства Коши-Буняковского и свойств функций непрерывных на компакте

$$| \, f_k(\vec{y}) - f_k(\vec{z}) \, | \leq \sum_{j=1}^{n} | \, y_j - z_j \, | \left| \frac{\partial f_k(\vec{\xi}_{(k)})}{\partial x_j} \right| \leq M_k \sum_{j=1}^{n} | \, y_j - z_j \, | \ ,$$

где $M_k = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left| \dfrac{\partial f_k(\vec{\xi}_{(k)})}{\partial x_j} \right|$.

Откуда, по определению нормы

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{z}) \right\rangle &= \max_{1\le k\le n} \max_{\vec{y},\vec{z}\in G} \left| f_k(\vec{y}) - f_k(\vec{z}) \right| \le \\
&\le \max_{1\le k\le n} \max_{\vec{y},\vec{z}\in G} M_k \sum_{j=1}^{n} |\, y_j - z_j \,| \le \\
&\le \Big(\max_{1\le k\le n} M_k \Big) \Big(\max_{\vec{y},\vec{z}\in G} \; n \max_{1\le j\le n} |\, y_j - z_j \,| \Big) \le \\
&\le M\, n \, \langle \vec{y} - \vec{z} \rangle = L \, \langle \vec{y} - \vec{z} \rangle \ ,
\end{aligned}$$

где $M = \max\limits_{1\le k\le n} M_k$, а $L = nM$.

Таким образом, из условия теоремы 1.1.1 следует выполнение условий теоремы 4.3.1. Поэтому утверждение теоремы 1.1.1, следующее из утверждения теоремы 4.3.1, справедливо.

Продолжаемость локального решения задачи Коши

Уточним и расширим понятие продолжения решения задачи Коши, дав

Определение 4.4.1	Пусть вектор-функция $\vec{y}(x),\ x \in [a,b]$ – решение задачи Коши (4.1.1) – (4.1.2). Будем говорить, что вектор-функция $\vec{z}(x),\ x \in [a,B]$ – частное решение уравнения (4.1.1) – является *продолжением вперед* решения $\vec{y}(x)$, если $$b < B \ \text{ и } \ \vec{z}(x) \equiv \vec{y}(x),\ x \in [a,b]\,.$$

В случае когда $B = +\infty$, решение задачи Коши называется *неограниченно продолжаемым вперед.*

Продолжаемость назад решения задачи Коши определяется аналогично для $A < a$.

Наконец, решение задачи Коши $\vec{y}(x)$ называется *непродолжаемым на промежутке* $\{a, b\}$, если для каждого другого решения этой задачи $\vec{y}_1(x)$, определенного на промежутке $\{A, B\}$ и совпадающего с $\vec{y}(x)$ на $\{A, B\} \cap \{a, b\}$, оказывается, что

$$\{A, B\} \subseteq \{a, b\}.$$

Имеет место

Теорема 4.4.1 **Пусть в области G выполнены условия теоремы 4.3.1 (Коши). Тогда задача Коши (4.1.1) – (4.1.2) имеет единственное непродолжимое решение, определенное на некотором максимальном интервале** (α, β).

Доказательство.
Для простоты сначала рассмотрим лишь случай продолжения вперед. Пусть $\vec{y}(x)$ – локальное решение задачи Коши, существование и единственность которого следует из теоремы 4.3.1. И пусть G – замкнутая, ограниченная область. Покажем, что решение может быть продолжено вперед до γ – границы G.

Если оказалось, что $\left\| \begin{array}{c} x_0 + \alpha\delta_r \\ \vec{y}(x_0 + \alpha\delta_r) \end{array} \right\| \in \gamma, \quad 0 < \alpha \leq 1$, то доказательство этого утверждения завершено. В противном случае положим $x_{(1)} = x_0 + \delta_r$ и решим новую задачу Коши: $\vec{z}\,' = \vec{f}(x, \vec{z})$, $\vec{z}(x_{(1)}) = \vec{y}(x_{(1)})$. Находим ее решение на отрезке $[x_0, x_{(2)}]$, где $x_{(2)} > x_{(1)}$ и т.д. В итоге мы получаем монотонно возрастающую последовательность $\{x_{(k)}\}$, которая ограничена сверху в силу ограниченности G. Значит, она имеет предел $B = \sup\limits_k \{x_{(k)}\} = \max\limits_k \{x_{(k)}\}$, поскольку G замкнуто.

Из ограниченности производной решения задачи Коши следует равномерная непрерывность этого решения. Значит точка $\| \, B \quad \vec{z}(B) \, \|^{\mathrm{T}} \in \gamma$ и дальнейшее продолжение вперед в G невозможно.

Пусть G не является замкнутой, ограниченной областью. Аппроксимируем ее изнутри расширяющейся последовательностью замкнутых, ограниченных областей $\{\overline{U}_{(n)}\}$ с границами $\gamma_{(n)}$ $\forall n$ такими, что $\left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in \overline{U}_{(n)}$ и $\overline{U}_{(n)} \subset \overline{U}_{(n+1)} \subset G$. Для каждого n решение задачи Коши существует на отрезке $[a_{(n)}, b_{(n)}]$, причем $\left\| \begin{matrix} a_{(n)} \\ \vec{y}(a_{(n)}) \end{matrix} \right\| \in \gamma_{(n)}$ и $\left\| \begin{matrix} b_{(n)} \\ \vec{y}(b_{(n)}) \end{matrix} \right\| \in \gamma_{(n)}$.

Последовательность $\{a_{(n)}\}$ монотонно убывающая, а $\{b_{(n)}\}$ монотонно возрастающая. Следовательно они имеют пределы (быть может, бесконечные), равные α и β соответственно.

Таким образом, интервал (α, β) оказывается максимальным интервалом существования решения задачи Коши в области G.

Из этой теоремы следует, что точки графика решения задачи Коши могут подходить сколь угодно близко к границе области G или же уходить в бесконечность, если область G не ограничена. Иначе говоря, продолжение возможно пока выполняются условия существования и единственности, что иллюстрирует

Задача 4.4.1 Найти максимальное непродолжимое решение следующих задач Коши (при $n = 1$).

Решение.

1°. $y' = 1,\ y(0) = 0,\ G = \{|y| \le 2, |x| \le 1\}$. В этом случае график решения $y(x) = x$ достигает границы области G, а его предельная точка $\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$ принадлежит этой границе.

2°. Пусть $y' = y^2 + 1,\ y(0) = 0$, а область $G = E^2$. Здесь максимальный интервал будет $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а непродолжаемое на нем решение задачи Коши $y(x) = \operatorname{tg} x$ стремится к $\pm\infty$ при $x \to \pm\dfrac{\pi}{2}$.

3°. Наконец пусть $y' = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x},\ y\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$, а область $G = \{x > 0, -\infty < y < +\infty\}$. Решение задачи Коши $y(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Его предельные точки при $x \to +0$ заполняют отрезок $[-1, 1]$ на оси Oy.