Существование и единственность решения задачи Коши в линейном и квазилинейном случаях

Пусть матрица $\| A(x) \|$ и вектор-функция $\| b(x) \|$ непрерывны для любого $x \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим следующую задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\|\vec{y}\,'\| = \| A(x) \| \| \vec{y} \| + \| b(x) \| \ , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \ , \tag{4.7.1}$$

а также, тесно с ней связанную, задачу Коши вида

$$\|\vec{y}\,'\| = \| \vec{f}(x, \vec{y}) \| \ , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{4.7.2}$$

для *квазилинейного* случая, когда правая часть в (4.7.2) определена $\forall x \in R$ и может расти при $\langle \vec{y} \rangle \to +\infty$ не быстрее линейной функции.

Последнее условие формально означает, что $\displaystyle\lim_{<\vec{y}> \to +\infty} \frac{\left\langle \vec{f}(x, \vec{y}) \right\rangle}{\langle \vec{y} \rangle} = 0$.

Например, $\left\langle \vec{f} \right\rangle \sim \sqrt[k]{\langle \vec{y} \rangle}, \ \ k > 1$ или $\left\langle \vec{f} \right\rangle \sim \ln \langle \vec{y} \rangle$.

Рассмотрим вначале задачу (4.7.2). Имеет место

Теорема 4.7.1

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в непустой области $G \subseteq E^{n+1} : \{x \in (\alpha, \beta)\ ,\ \ \vec{y} \in E^n\}$, а также квазилинейна в G.
И пусть $\vec{f}(x, \vec{y})$ в *любой* замкнутой области

$$\overline{Q} : \{x \in [\alpha_0, \beta_0] \subset (\alpha, \beta)\ ,\ \ \vec{y} \in E^n\}$$

удовлетворяет неравенству $\left\langle \vec{f}(x, \vec{y}) \right\rangle \leq M$ и условию Липшица с константой Липшица равной L.

Тогда $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ *на всем интервале* (α, β) **задача Коши (4.7.2) имеет единственное решение.**

Доказательство.

Пусть $x_0 \in [\alpha_0, \beta_0]$. По условию теоремы существует такое число $L > 0$, что на множестве $\overline{Q}$ справедлива оценка

$$< \vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{z}) > \leq \ L \cdot < \vec{y} - \vec{z} > \ .$$

Выберем некоторое фиксированное число

$$\delta = \frac{r}{M + Lr} = \frac{1}{(M/r) + L} \in \left(0\,, \frac{1}{L}\right).$$

Оператор

$$\widehat{\Phi}\vec{y} = \vec{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du\,,$$

для которого на $[x_0, x_0 + \delta]$ верна оценка

$$< \widehat{\Phi}\vec{y} - \widehat{\Phi}\vec{z} > \leq \ L\delta < \vec{y} - \vec{z} >,$$

сжимающий, поскольку в силу выбора δ имеем $L\delta < 1$. Тогда, согласно теореме 4.3.1, решение задачи Коши существует на $[x_0, x_0 + \delta]$ и единственно.

Построим теперь продолжение полученного решения на отрезок $[x_0, x_0 + 2\delta]$ при помощи интегрального уравнения

$$\vec{y}(x) = \vec{y}(x_0 + \delta) + \int\limits_{x_0+\delta}^{x} \vec{f}(u, \vec{y}(u))\, du\,,$$

правую часть которого мы опять-таки рассматриваем как сжимающий оператор, но уже на отрезке $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]\,.$

Заметим, что стыковка решений задач Коши на отрезках $[x_0, x_0 + \delta]$ и $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]$ гладкая. Действительно, в силу непрерывности $\vec{f}(x, \vec{y})$ и уравнения $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ будет непрерывной также и вектор-функция $\vec{y}'$. Таким образом, решение задачи Коши продолжено вперед на величину δ.

Нетрудно видеть, что процедура продолжения вперед, вплоть до границы множества $\overline{Q}$, может иметь лишь конечное число шагов N, поскольку величины δ и β_0 конечные. Здесь N – минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$x_0 + N\delta \geq \beta_0 \,.$$

Аналогично обстоит дело и с продолжением решения задачи Коши назад.

В итоге получаем, что решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$, а поскольку этот отрезок, содержащийся в интервале (α, β), произвольный, то мы приходим к заключению о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 4.7.1 **Пусть матрица** $\| A(x) \|$ **и вектор-функция** $\| b(x) \|$ **непрерывны** $\forall x \in (\alpha, \beta)$**. Тогда** $\forall \left\| \begin{matrix} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix} \right\| \in G$ *на всем интервале* (α, β) **задача Коши (4.7.1) имеет решение и притом единственное.**

Доказательство.

Если взять

$$L = \max_{x \in [\alpha_0, \beta_0]} \max_{i,j=[1,n]} |\, \alpha_{ij}(x) \,| \ ,$$

то для задачи (4.7.1) будут удовлетворены все условия теоремы 4.7.1, в силу чего утверждение следствия является справедливым.

Следствие доказано.

В заключение следует отметить, что в отличие от теоремы 4.3.1 (Коши), устанавливающей существование и единственность решения задачи Коши лишь *локально*, теорема 4.7.1 имеет *глобальный* характер.

Кроме того, итерационная процедура

$$\vec{y}_{(k)}(x) = \widehat{\Phi}\vec{y}_{(k-1)}(x)\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

для квазилинейных и линейных задач сходится из *любой* начальной точки множества G, в то время как в общем случае, сходимость гарантируется лишь для начальных приближений, достаточно *близких* к точному решению задачи Коши.

Нормальные линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Определение 5.1.1

Нормальной линейной системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \ldots & \ldots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{cases} \tag{5.1.1}$$

где $t \in \Omega$ – вещественный аргумент, комплекснозначные $x_k(t)$, $k = [1, n]$ – неизвестные функции, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на Ω функции, называемые *свободными членами*. Комплекснозначные функции $a_{ij}(t)$ заданы и непрерывны на Ω $\forall i, j = [1, n]$.

Пусть

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{array} \right\|,$$

$$\|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\|, \quad \|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{array} \right\| ,$$

тогда систему уравнений (5.1.1) можно записать в так называемом *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t) \; \forall i = [1, n] \; ,$$

или же, в еще более компактной, матричной форме

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\| \; . \tag{5.1.2}$$

Предварительно отметим, что для случая *вещественной* матричной функции $\|A(t)\|$ справедлива

Лемма 5.1.1

Пусть матрица $\| A(x) \|$ **вещественная, тогда**

1°. $\operatorname{Re}\vec{x}$ **– вещественная и** $\operatorname{Im}\vec{x}$ **– мнимая части** $\vec{x}(t)$ **– решения однородной системы (5.1.2)** $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$, **также являются решениями этой системы.**

2°. $\operatorname{Re}\vec{x}$ **– вещественная и** $\operatorname{Im}\vec{x}$ **– мнимая части** $\vec{x}(t)$ **– решения неоднородной системы (5.1.2)** $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|+\|\vec{b}(t)\|$, **являются решениями неоднородных систем:**

$$\|\operatorname{Re}\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\operatorname{Re}\vec{x}(t)\| + \|\operatorname{Re}\vec{b}(t)\| \text{ и}$$

$$\|\operatorname{Im}\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\operatorname{Im}\vec{x}(t)\| + \|\operatorname{Im}\vec{b}(t)\|$$

соответственно.

3°. Верно утверждение, обратное утверждению 2°.

Справедливость утверждения леммы следует из линейности операции дифференцирования, распределительного свойства умножения матриц и условия равенства комплексных чисел.

Рассмотрим теперь основные свойства нормальных систем линейных дифференциальных уравнений.

Имеет место

Лемма 5.1.2

Справедливы следующие утверждения.

1°. **Любая линейная комбинация частных решений однородной системы уравнений также является ее частным решением.**

2°. **Сумма частного решения** *неоднородной* **системы уравнений и частного решения** *однородной* **системы есть частное решение** *неоднородной* **системы уравнения.**

3°. **Разность двух частных решений** *неоднородной* **системы уравнений есть частное решение** *однородной* **системы.**

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ – частные решения линейного однородного уравнения

$$\widehat{L}\vec{x}(t) = \vec{o}\,,$$

записанного в операторной форме, тогда справедливость утверждения 1° следует из равенства

$$\widehat{L}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{x}_{(i)}(t)\right) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\widehat{L}\vec{x}_{(i)}(t)$$

для любых чисел $\{\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots\,, \lambda_m\}$.

Утверждения 2° и 3° проверяются непосредственно. Действительно, пусть $\vec{x}(t)$ – частное решение однородной системы уравнений $\widehat{L}\vec{x}(t) = \vec{o}$, а $\vec{y}(t)$, $\vec{y}_{(1)}(t)$, $\vec{y}_{(2)}(t)$ – частные решения неоднородной системы $\widehat{L}\vec{y}(t) = \vec{b}(t)$.

Тогда

$$\widehat{L}\big(\vec{x}(t) + \vec{y}(t)\big) = \widehat{L}\vec{x}(t) + \widehat{L}\vec{y}(t) = \vec{o} + \vec{b}(t) = \vec{b}(t) \qquad \text{и}$$

$$\widehat{L}\big(\vec{y}_{(1)}(t) - \vec{y}_{(2)}(t)\big) = widehatL\vec{y}_{(1)}(t) - \widehat{L}\vec{y}_{(2)}(t) = \vec{b}(t) - \vec{b}(t) = \vec{o}\,.$$

Лемма доказана.

Убедимся теперь, что справедлива

Теорема 5.1.1 **Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений** $\widehat{L}\vec{y}(t) = \vec{b}(t)$ **есть сумма** *любого частного* **решения этой неоднородной системы и** *общего* **решения однородной системы** $\widehat{L}\vec{y}(t) = \vec{o}$.

Доказательство.

Пусть множество $\boxed{\text{Частн. реш. неоднор.}}$ состоит из одной конкретной вектор-функции $\vec{w}(t)$, которая является частным решением неоднородной системы, а множество $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$ содержит *все* вектор-функции – частные решения однородной системы.

Тогда, в силу п. 2° леммы 5.1.2, множество

$$\boxed{\text{Частн. реш. неоднор.}} + \boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$$

состоит только из вектор-функций, являющихся частными решениями неоднородной системы. Покажем, что это множество содержит *все* частные решения неоднородной системы. Действительно, вектор-функция $\vec{v}(t) - \vec{w}(t)$, где $\vec{v}(t)$ – некоторое *произвольное* частное решение неоднородной системы, обязательно (по условию теоремы и в силу п.3° леммы 5.1.2) содержится во множестве $\boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$.

То есть, $\vec{v}(t) - \vec{w}(t) \in \boxed{\text{Общ. реш. однор.}}$, но тогда

$$\vec{v}(t) \in \vec{w}(t) + \boxed{\text{Общ. реш. однор.}} ,$$

что и является утверждением теоремы.

Введем теперь понятия линейной зависимости и линейной независимости для вектор-функций.

Определение 5.1.2

Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно зависимыми* на множестве Ω, если существуют, не равные нулю одновременно, числа λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega. \tag{5.1.3}$$

Определение 5.1.3

Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно независимыми* на множестве Ω, если из условия

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Следует обратить внимание на то, что понятие линейной зависимости вектор-функций $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)\}$ на некотором множестве $t \in \Omega$ отличается от понятия линейной зависимости векторов, используемого в линейной алгебре.

Задача 5.1.1

Будут ли линейно зависимыми на R вектор-функции

$$\|\vec{x}_{(1)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{x}_{(2)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\| ?$$

Решение.

Алгебраические векторы $\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\|$ очевидно линейно зависимы при любом фиксированном $t \in (-\infty, +\infty)$, поскольку $t\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\|$.

Однако как вектор-функции они линейно независимы, поскольку из

$$\lambda_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \forall t$$

(например, при $t = 1$ и $t = 2$) следует, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 0\,, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\,, \end{array} \right.$$

Решение получено.

имеющей единственное (согласно теореме Крамера) решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Полезным инструментом, позволяющем делать заключения о линейной зависимости или линейной независимости системы вектор-функций, служит определитель специального вида, называемый определителем Вронского.

Определение 5.1.4	*Детерминантом Вронского* (или *вронскианом*) набора $m-$мерных вектор-функций $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)\,\}$ называется определитель квадратной матрицы m-го порядка, столбцы которого суть координатные представления этих вектор-функций. $$W(t) = \det \left\lVert \begin{array}{cccc} x_{1(1)} & x_{1(2)} & \ldots & x_{1(m)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} & \ldots & x_{2(m)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_{m(1)} & x_{m(2)} & \ldots & x_{m(m)} \end{array} \right\rVert . \qquad (5.1.4)$$

Будет иметь место

Лемма 5.1.3 **Пусть $W(t)$ – вронскиан системы вектор-функций $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t), \quad t \in \Omega$. Тогда справедливы следующие утверждения.**

1°. Если $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ линейно зависимы на множестве Ω, то $W(t) \equiv 0$ на Ω.

2°. Если $W(t) \not\equiv 0$ на множестве Ω (то есть $\exists t_0 \in \Omega : \; W(t_0) \neq 0$) , то вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ линейно независимы на Ω.

Доказательство.

Справедливость леммы следует из того, что столбцы квадратной матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда детерминант этой матрицы равен нулю.

Лемма доказана.

Утверждения, обратные утверждениям леммы 5.1.3, не верны. Убедитесь в этом, рассмотрев в качестве примера вектор-функции, указанные в условии задачи 5.1.1.

Теорема 5.1.2

Пусть вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ **являются** *решениями* **однородной системы уравнений** $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$ **с** *непрерывной* **матрицей** $\|A(t)\| \;\; \forall t \in \Omega$.

Тогда для их линейной зависимости необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан $W(t) \equiv 0$ **на** Ω.

Для линейной независимости этих решений необходимо и достаточно, чтобы $\exists t_0 \in \Omega : \; W(t_0) \neq 0$ **(то есть** $W(t) \not\equiv 0$ **на** Ω **) .**

Доказательство.

Необходимость вытекает из пп. 1°, 2° леммы 5.1.3.

Докажем достаточность. Если $W(t) \equiv 0$ на Ω, то $\exists t_0 \in \Omega$ такое, что $W(t_0) = 0$. Для этого t_0 столбцы вронскиана линейно зависимы, и потому существуют не равные нулю одновременно константы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t_0) = 0\,.$$

Используем эти константы, чтобы построить новую вектор-функцию

$$\vec{x}^{\,*}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t)\,. \tag{5.1.5}$$

Она в силу леммы 5.1.2 есть решение задачи Коши для системы уравнений $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$ с начальным условием $\vec{x}^{\,*}(t_0) = \vec{o}$.

С другой стороны, функция $\vec{z}(t) \equiv \vec{o}$ есть решение задачи Коши для уравнения $\|\dot{\vec{z}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{z}(t)\|$ с $\vec{z}(t_0) = \vec{o}$. И в силу теоремы существования и единственности

$$\vec{x}^{\,*}(t) = \vec{z}(t) \equiv \vec{o}\,,$$

то есть вектор-функция (5.1.5) оказывается равной нулевой вектор-функции, а решения $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ линейно зависимыми.

Теорема доказана.

Отметим, что если вектор-функции $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ не являются решениями однородной системы дифференциальных уравнений $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$, то утверждение теоремы 5.1.2 не верно.

Проверьте самостоятельно, что, например, вектор-функции:

$$\|\vec{x}_{(1)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{x}_{(2)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\| \ ,$$

не могут являться решениями никакой системы дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \alpha_{11}(t)x_1 + \alpha_{12}(t)x_2\,, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}(t)x_1 + \alpha_{22}(t)x_2\,, \end{array} \right.$$

хотя они линейно независимые вектор-функции.

Из теоремы 5.1.2 также следует, что в случае, когда вектор–функции $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ суть решения однородной системы $\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|$, для их вронскиана $W(t)$ нет точек $t_1 \in \Omega$ и $t_2 \in \Omega$ ($t_1 \neq t_2$), в которых $W(t_1) = 0$, а $W(t_2) \neq 0$.

Непрерывность матрицы $\|A(t)\|$ в условии теоремы также существенна, поскольку именно она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши. Иначе говоря, в том случае, когда вектор-функции $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ хотя и являются решениями однородной системы дифференциальных уравнений, но матрица $\|A(t)\|$ не непрерывна, утверждение теоремы 5.1.2 может не быть верным.