Построение общего решения линейной системы с переменными коэффициентами

Рассмотрим теперь вопрос о построении формулы, описывающей общее решение системы дифференциальных уравнений вида (5.1.1). Вначале дадим

Определение 5.2.1	*Фундаментальным набором решений* называется совокупность n любых линейно независимых частных решений однородной системы уравнений $$\left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\| = \left\|A(t)\right\|\left\|\vec{x}(t)\right\|. \qquad (5.2.1)$$

Лемма 5.2.1 **Фундаментальные наборы для систем (5.2.1) с непрерывной матрицей $\|A(t)\|$ существуют.**

Доказательство.

В справедливости утверждения леммы убедимся непосредственным построением.

Во-первых, при некотором значении $t_0 \in \Omega$ выберем n линейно независимых n-мерных векторов $\{\,\vec{x}^0_{(1)}, \vec{x}^0_{(2)}, \ldots, \vec{x}^0_{(n)}\,\}$.

Далее, пусть $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ суть решения задач Коши вида

$$\|\dot{\vec{x}}_{(k)}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}_{(k)}(t)\|\,,\ \ \vec{x}_{(k)}(t_0) = \vec{x}^0_{(k)}\,.$$

Эти решения – вектор-функции $\vec{x}_{(k)}(t)$, существуют и единственны.

Они линейно независимые, поскольку их значения при $t = t_0$ линейно независимые векторы, и равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t) = \vec{o}(t) \quad \forall t \in \Omega$$

возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0\,.$

Лемма доказана.

Формулу для общего решения однородной системы дифференциальных уравнений вида (5.2.1) описывает

Теорема 5.2.1 **Пусть вектор-функции** $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ **являются линейно независимыми частными решениями однородной системы уравнений (5.2.1) с** *непрерывной* **матрицей** $\|A(t)\| \ \ \forall t \in \Omega$, **тогда общее решение этой системы имеет вид**

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{x}_{(k)}(t)\,, \tag{5.2.2}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – **произвольные комплексные постоянные.**

Доказательство.

Из п. 1° леммы 5.1.2 следует, что каждая линейная комбинация вида (5.2.2) является частным решением системы уравнений (5.2.1).

Покажем теперь, что любое решение этой системы может быть представлено в виде формулы (5.2.2).

Пусть $\vec{x}_{(0)}(t)$ – какое-то решение системы (5.2.1). Выберем $t_0 \in \Omega$ при котором $W(t)$ – вронскиан линейно независимой системы решений $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ – отличен от нуля и рассмотрим равенство

$$\vec{x}_{(0)}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \vec{x}_{(k)}(t_0)\,.$$

Развернутая (координатная) форма этого равенства может быть записана как система n линейных уравнений с n неизвестными C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*

$$\left\{\begin{array}{l} C_1^* x_{1(1)}(t_0) + C_2^* x_{1(2)}(t_0) + \ldots + C_n^* x_{1(n)}(t_0) = x_{1(0)}(t_0)\,, \\ C_1^* x_{2(1)}(t_0) + C_2^* x_{2(2)}(t_0) + \ldots + C_n^* x_{2(n)}(t_0) = x_{2(0)}(t_0)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^* x_{n(1)}(t_0) + C_2^* x_{n(2)}(t_0) + \ldots + C_n^* x_{n(n)}(t_0) = x_{n(0)}(t_0)\,. \end{array}\right.$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\det \left\| \begin{array}{llll} x_{1(1)}(t_0) & x_{1(2)}(t_0) & \dots & x_{1(n)}(t_0) \\ x_{2(1)}(t_0) & x_{2(2)}(t_0) & \dots & x_{2(n)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n(1)}(t_0) & x_{n(2)}(t_0) & \dots & x_{n(n)}(t_0) \end{array} \right\| = W(t_0) \neq 0\,.$$

Тогда, согласно теореме Крамера, значения неизвестных – констант $C_1^*,\, C_2^*,\, \dots,\, C_n^*$ существуют и определяются однозначно.

В этом случае вектор-функция $\vec{x}^*(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k^* \vec{x}_{(k)}(t)$ есть решение задачи Коши для системы (5.2.1) с начальным условием $\vec{x}^*(t_0) = \vec{x}_{(0)}(t_0)$. Равно как и вектор-функция $\vec{x}_{(0)}(t)$ является (по построению) решением этой же задачи Коши.

При $t = t_0$ $\vec{x}_{(0)}(t_0) = \vec{x}^*(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k^* \vec{x}_{(k)}(t_0)\,,$ значит, по теореме единственности они должны совпадать и $\forall t \in \Omega\,.$ Таким образом получаем, что любое решение системы (5.2.1) представимо в виде (5.2.2).

Теорема доказана.

Альтернативной формулировкой доказанной теоремы является

Следствие 5.2.1 **Множество всех решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений (5.2.1) является n-мерным линейным пространством, базисом в котором может служить любой фундаментальный набор ее решений.**

В вычислительной практике достаточно часто используют другую форму записи общего решения, основой которой служит

Определение 5.2.2	*Фундаментальной матрицей* однородной системы дифференциальных уравнений (5.2.1) называется квадратная матрица порядка n, столбцы которой суть координатные представления вектор-функций, образующих фундаментальный набор решений.

Пусть вектор-функции $\{\, \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t) \ \forall t \in \Omega \,\}$ образуют фундаментальный набор решений. Тогда, во введенных выше обозначениях, фундаментальная матрица имеет вид

$$\|X(t)\| = \left\| \begin{array}{llll} x_{1(1)}(t) & x_{1(2)}(t) & \ldots & x_{1(n)}(t) \\ x_{2(1)}(t) & x_{2(2)}(t) & \ldots & x_{2(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n(1)}(t) & x_{n(2)}(t) & \ldots & x_{n(n)}(t) \end{array} \right\| ,$$

а общее решение однородной системы (5.2.1) может быть представлено в форме

$$\|\vec{x}(t)\| = \|X(t)\| \|\vec{C}\| ,$$

где $\|\vec{C}\| = \|\, C_1 \, C_2 \, \ldots \, C_n \,\|^{\mathrm{T}}$ – комплекснозначный вектор-столбец произвольных констант в записи решения.

Отметим, что фундаментальная матрица *не вырожденная* $\forall t \in \Omega$, поскольку ее детерминант является вронскианом линейно независимого набора решений системы (5.2.1) .

В качестве упражнения самостоятельно покажите, что также справедлива

Теорема 5.2.2 **Если $\|X(t)\|$ фундаментальная матрица системы (5.2.1), то**

1°. Матрица $\|Y(t)\| = \|X(t)\| \, \|S\|$, где $\|S\|$ – произвольная квадратная невырожденная матрица порядка n, также фундаментальная матрица этой системы.

2°. Для двух любых фундаментальных матриц $\|X(t)\|$ и $\|Y(t)\|$ системы (5.2.1) существует, и притом единственная, квадратная невырожденная матрица $\|S\|$ такая, что $\|Y(t)\| = \|X(t)\| \, \|S\|$.

Универсального способа построения фундаментального набора решений для (5.2.1), к сожалению, до сих пор не найдено. Однако имеется возможность вычисления частных решений этой однородной системы уравнений по другим, найденным ранее, ее частным решениям.

Вначале дадим

Определение 5.2.3	Функция $\mathrm{Sp}\|A(t)\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{kk}(t)$ называется *следом* квадратной матрицы $\|A(t)\|$ порядка n.

Для этого понятия оказывается справедливой

Лемма 5.2.2 **Пусть квадратная матрица $\|Q(t)\|$ в точке $t = t_0$ невырождена и дифференцируема. Тогда в этой точке**

$$\frac{\acute{\det}\|Q(t)\|}{\det\|Q(t)\|} = \mathrm{Sp}\left(\ \|\acute{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1} \right) .$$

Доказательство.

Из формулы Тейлора следует, что

$$\|Q(t_0+\Delta)\| = \|Q(t_0)\| + \|\acute{Q}(t_0)\|\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\| \quad \text{при} \ \ \Delta \to 0\,.$$

Тогда

$$\det\|Q(t_0+\Delta)\| = \det\Big[\|Q(t_0)\| + \|\acute{Q}(t_0)\|\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big] =$$

$$= \det\|Q(t_0)\|\cdot\det\Big[\|E\| + \|\acute{Q}(t_0)\|\cdot\ \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big]\,. \tag{5.2.3}$$

Теперь покажем, что при $\Delta \to 0$

$$\det\Big[\|E\| + \|\acute{Q}(t_0)\|\cdot\ \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\mathrm{o}(\Delta)\|\Big] =$$

$$= 1\ +\ \mathrm{Sp}\left(\|\acute{Q}(t_0)\|\cdot\|Q(t_0)\|^{-1}\right)\Delta\ +\ \mathrm{o}(\Delta)\,. \tag{5.2.4}$$

Действительно,

$$\det\left[\|E\| + \|\acute{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|\text{o}(\Delta)\|\right] =$$

$$= \det\left\|\begin{array}{cccc} 1+\beta_{11}\Delta+\text{o} & \beta_{12}\Delta+\text{o} & \ldots & \beta_{1n}\Delta+\text{o} \\ \beta_{21}\Delta+\text{o} & 1+\beta_{22}\Delta+\text{o} & \ldots & \beta_{2n}\Delta+\text{o} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1}\Delta+\text{o} & \beta_{n2}\Delta+\text{o} & \ldots & 1+\beta_{nn}\Delta+\text{o} \end{array}\right\|,$$

$$\text{где} \quad \beta_{ij} = \left(\|\acute{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1}\right)_{ij} \quad \forall i,j=[1,n]\,.$$

Из курса линейной алгебры известно, что детерминант квадратной матрицы представляется как сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n различных элементов этой матрицы, взятых *по одному* из каждой строки и каждого столбца. Значит, (в рассматриваемом случае) только произведение элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, есть величина порядка $\text{O}(1)$, а не $\text{O}(\Delta)$ или меньшего.

По той же причине члены порядка малости Δ могут содержаться только в произведении элементов, стоящих на главной диагонали, которое равно

$$\big(1+\beta_{11}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big)\big(1+\beta_{22}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big)\ldots\big(1+\beta_{nn}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\big)=$$

$$=1+\Delta\sum_{k=1}^{n}\beta_{kk}+\mathrm{o}(\Delta)=1+\Delta\cdot\mathrm{Sp}\left(\|\acute{Q}(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\right)+\mathrm{o}(\Delta)\,,$$

что и доказывает равенство (5.2.4).

С его помощью равенство (5.2.3) может быть записано в виде

$$\frac{\det\|Q(t_0+\Delta)\|-\det\|Q(t_0)\|}{\Delta}=$$

$$=\det\|Q(t_0)\|\cdot\mathrm{Sp}\left(\|\acute{Q}(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\right)+\frac{\mathrm{o}(\Delta)}{\Delta},$$

перейдя в котором к пределу при $\Delta\to 0$, получим

$$\frac{\acute{\det}\|Q(t)\|}{\det\|Q(t)\|}=\mathrm{Sp}\left(\ \|\acute{Q}(t)\|\cdot\|Q(t)\|^{-1}\right)\ .$$

Лемма доказана.

Рассмотрим снова однородную систему линейных дифференциальных уравнений (5.2.1)

$$\|\acute{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|\,.$$

Как и раньше, будем предполагать, что матрица $\|A(t)\|$ непрерывна при $t \in \Omega$.

Пусть $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\,\}$ – некоторый набор любых частных решений системы (5.2.1), а $W(t) = \det\|X(t)\|$ – вронскиан этого набора решений. Тогда справедлива

Теорема 5.2.3 (Лиувилля - Остроградского) **Для любых $t_0,\, t \in \Omega$ верно соотношение (называемое** *формулой Лиувилля–Остроградского*)

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\|A(u)\|du\right)\,, \qquad (5.2.5)$$

Доказательство.

Если частные решения $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ линейно зависимые на множестве Ω, то $W(t) \equiv 0\,,\quad t \in \Omega$ и равенство (5.2.5) очевидно.

В случае, когда эти частные решения линейно независимые, они образуют фундаментальный набор с фундаментальной матрицей $\|X(t)\|$, то есть вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ суть столбцы этой матрицы. Тогда справедливо матричное равенство

$$\|\acute{X}(t)\| = \|A(t)\|\|X(t)\|\,.$$

Далее, из

$$\|\acute{X}(t)\|\|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\|\|X(t)\|\|X(t)\|^{-1}$$

имеем

$$\|\acute{X}(t)\|\|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\|\,,$$

а в силу леммы 5.2.2 получаем

$$\frac{\acute{W}(t)}{W(t)} = \frac{\acute{\det}\|X(t)\|}{\det\|X(t)\|} = \mathrm{Sp}\left(\|\acute{X}(t)\|\|X(t)\|^{-1}\right) = \mathrm{Sp}\|A(t)\|$$

или, окончательно,

$$\frac{\acute{W}(t)}{W(t)} = \mathrm{Sp}\|A(t)\|\,.$$

Интегрируя это равенство по t, получаем соотношение (5.2.5).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай *неоднородной* системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\|\acute{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|\,. \tag{5.2.6}$$

Общее решение соответствующей однородной системы (5.2.1) будем считать известным, а матричные функции $\|A(t)\|$ и $\|\vec{b}(t)\|$ – непрерывными $\forall t \in \Omega$.

Согласно теореме 5.1.1 общее решение неоднородной системы представимо как сумма частного решения неоднородной и общего решения однородной систем уравнений. Следовательно, задача построения общего решения неоднородной системы сводится к поиску какого-нибудь частного решения неоднородной системы, для получения которого воспользуемся методом *вариации постоянных* (см. § 1.3 и теорему 2.5.1).

Пусть $\|X(t)\|$ – фундаментальная матрица однородной системы (5.2.1). В этом случае будет верна

Теорема 5.2.4 **Система (5.2.6) имеет частное решение вида**

$$\|\vec{x}^{*}(t)\| = \|X(t)\| \int\limits_{t_0}^{t} \|X(u)\|^{-1} \|\vec{b}(u)\| \, du \,. \qquad (5.2.7)$$

Доказательство.

Частное решение неоднородной системы (5.2.6) будем искать в виде
$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\|\|\vec{C}(t)\|\,,$$

где $\vec{C}(t)$ некоторая неизвестная заранее непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Подставив это выражение в (5.2.6), с учетом равенства
$$\|\acute{X}(t)\| = \|A(t)\|\|X(t)\|\,,$$

получим
$$\|A(t)\|\|X(t)\|\|\vec{C}(t)\| + \|X(t)\|\|\acute{\vec{C}}(t)\| =$$
$$= \|A(t)\|\|X(t)\|\|\vec{C}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|\,.$$

Откуда, в силу невырожденности фундаментальной матрицы,
$$\|\acute{\vec{C}}(t)\| = \|X(t)\|^{-1}\|\vec{b}(t)\|$$

и, окончательно,
$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\|\int\limits_{t_0}^{t}\|X(u)\|^{-1}\|\vec{b}(u)\|\,du\,.$$

Теорема доказана.