

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение n -го порядка вида

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = b(t), \quad (5.3.1)$$

где $a_k(t)$ и $b(t)$ непрерывны $\forall k = [0, n] \quad \forall t \in \Omega$ и $a_n(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Omega$.

Оно всегда может быть сведено при помощи следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), & x_2(t) &= \dot{y}(t), & x_3(t) &= \ddot{y}(t), & \dots \\ \dots, & & x_{n-1}(t) &= y^{(n-2)}(t), & x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

к равносильной системе линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}(t)}{a_n(t)} x_k(t) + \frac{b(t)}{a_n(t)}. \end{array} \right. \quad (5.3.3)$$

Или в матричном виде

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\| ,$$

где

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{a_0(t)}{a_n(t)} & \frac{a_1(t)}{a_n(t)} & \frac{a_2(t)}{a_n(t)} & \dots & \frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\| ,$$

$$\|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t)/a_n(t) \end{array} \right\| , \quad \|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| .$$

Формулы (5.3.2) и (5.3.3) позволяют делать заключения о свойствах уравнений вида (5.3.1) и их решений, используя результаты, полученные в § 5.1–5.2 для систем линейных уравнений.

Основой для этого служит

Лемма 5.3.1 При замене переменных (5.3.2) линейно зависящие решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно зависящие решения системы (5.3.5), и наоборот.

Аналогично, при замене переменных (5.3.2) линейно независимые решения уравнения (5.3.4) переходят в линейно независимые решения системы (5.3.5), и наоборот.

Теперь мы можем сформулировать для уравнения (5.3.1) утверждения, аналогичные доказанным ранее для систем (5.1.1). Так вид общего решения однородного уравнения (5.3.4) описывает

Теорема 5.3.1 Пусть функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ суть линейно независимые частные решения однородного уравнения (5.3.4). Тогда общее решение этого уравнения дается формулой

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k y_{(k)}(t),$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные постоянные.

По аналогии с ранее данным определением будет уместным и

Определение 5.3.1	<i>Фундаментальным набором решений</i> уравнения (5.3.4) называется совокупность любых n его линейно независимых частных решений.
----------------------	---

При этом будет иметь место

Теорема 5.3.2 **Для множества частных решений однородного уравнения (5.3.4) справедливы утверждения:**

- 1°. **Фундаментальные наборы этого уравнения существуют.**
- 2°. **Общее решение уравнения (5.3.4) есть совокупность всевозможных линейных комбинаций фундаментального набора решений.**
- 3°. **Множество всех частных решений однородного уравнения (5.3.4) является линейным пространством размерности n , базисом в котором может служить любой фундаментальный набор решений.**

Учитывая замену переменных (5.3.2), для уравнения (5.3.1) можно дать

Определение
5.3.2

Вронскианом набора $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ называется

$$\det \begin{vmatrix} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \dots & y_{(n)}(t) \\ \dot{y}_{(1)}(t) & \dot{y}_{(2)}(t) & \dots & \dot{y}_{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(t) & y_{(2)}^{(n-1)}(t) & \dots & y_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

обозначаемый, как и раньше, $W(t)$.

Перечислим теперь свойства решений однородного уравнения (5.3.4), описываемые с помощью понятия вронскиана.

Теорема 5.3.3 Пусть функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ определены и $n - 1$ раз непрерывно дифференцируемы $\forall t \in \Omega$ и $W(t)$ – их вронскиан. Тогда

- 1°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ линейно зависимы на Ω , то $W(t) \equiv 0$ на Ω .
- 2°. Если вронскиан $W(t) \not\equiv 0$ на Ω , то функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ линейно независимы на Ω .
- 3°. Пусть $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ суть частные решения однородного уравнения (5.3.4). Они линейно зависимы тогда и только тогда, когда и их вронскиан тождественно равен нулю, то есть $W(t) \equiv 0$ на Ω . Для их линейной независимости необходимо и достаточно, чтобы $W(t) \not\equiv 0$ на Ω , т. е. $\exists t_0 \in \Omega : W(t_0) \neq 0$.
- 4°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)$ частные решения однородного уравнения (5.3.4), то $\forall t_0, t \in \Omega$ справедлива формула Лиувилля–Остроградского

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)} du \right).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (5.3.1). Структуру его общего решения описывает

Теорема 5.3.4 **Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5.3.1) есть сумма *любого частного решения этого неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (5.3.4).***

Как и в случае неоднородной системы (5.3.3), частное решение неоднородного уравнения может быть найдено методом *вариации постоянных*.

Теорема 5.3.5 Пусть частные решения однородного уравнения (5.3.4) $\{y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \dots, y_{(n)}(t)\}$ образуют фундаментальный набор, тогда неоднородное уравнение (5.3.1) имеет частное решение вида

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) y_{(k)}(t), \quad (5.3.9)$$

где непрерывно дифференцируемые функции $C_k(t)$, $k = [1, n]$ определяются как квадратуры решений системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \dots & y_{(n)}(t) \\ \dot{y}_{(1)}(t) & \dot{y}_{(2)}(t) & \dots & \dot{y}_{(n)}(t) \\ \ddot{y}_{(1)}(t) & \ddot{y}_{(2)}(t) & \dots & \ddot{y}_{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(t) & y_{(2)}^{(n-1)}(t) & \dots & y_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \\ \dot{C}_3(t) \\ \dots \\ \dot{C}_n(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{vmatrix} \quad (5.3.10)$$

Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

В большинстве случаев решения линейного уравнения с переменными коэффициентами не выражаются даже в квадратурах.

Поэтому для практики важными оказываются косвенные методы, позволяющие делать заключения о свойствах таких решений без построения их явного вида, определяемого теоремой 5.3.4.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только *вещественных* функций вещественного переменного, что позволит более широко использовать неравенства для описания свойств решений.

Например, если для уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \tag{5.4.1}$$

имеем $a_0(t) > 0, t \in \Omega$, то (согласно известной из курса математического анализа теореме) можно утверждать, что при $y > 0$ график любого частного решения на Ω будет иметь выпуклость вверх, поскольку в этом случае

$$\ddot{y} = -a_0(t)y < 0.$$

Менее очевидные, но также практически полезные методы могут быть применены для исследования *нулей решений*, то есть значений независимой переменной t , для которых искомая функция принимает нулевое значение.

Далее будем рассматривать линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0, \quad (5.4.2)$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0$.

Убедимся, что уравнение (5.4.2) может быть приведено к виду (5.4.1) при помощи линейной замены искомой функции по формуле $y(t) = p(t)u(t)$, где $u(t)$ – новая неизвестная функция, а

$$p(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds \right). \quad (5.4.3)$$

Действительно, если в уравнение (5.4.2) подставить $y(t) = p(t)u(t)$, то мы получим

$$(a_2 p \ddot{u} + 2a_2 \dot{p} \dot{u} + a_2 \ddot{p} u) + (a_1 p \dot{u} + a_1 \dot{p} u) + a_0 p u = 0$$

или

$$a_2 p \ddot{u} + (2a_2 \dot{p} + a_1 p) \dot{u} + (a_2 \ddot{p} + a_1 \dot{p} + a_0 p) u = 0,$$

то есть получаем уравнение, не содержащее слагаемого с \dot{u} , поскольку выбранная по формуле (5.4.3) функция $p(t)$ удовлетворяет легко проверяемому равенству $2a_2 \dot{p} + a_1 p = 0$.