Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Напомним, что мы рассматриваем линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,, \tag{5.4.2}$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\quad t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0$.

Мы показали, что уравнение (5.4.2) всегда может быть приведено к виду

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0\,,$$

не содержащего слагаемого с первой производной от искомой функции.

Для этого уравнения справедлива

Лемма 5.4.1 **Всякое ненулевое решение уравнения (5.4.1) может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке.**

Доказательство.

Предположим, что *нетривиальное* (то есть $y(t) \not\equiv 0$) непрерывно дифференцируемое решение уравнения (5.4.1) имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ бесконечное число нулей, из которых можно образовать числовую последовательность $\{t_m\}$. Эта последовательность ограниченная и по теореме Больцано–Вейерштрасса имеет предельную точку $t^* \in [\alpha, \beta]$. В нашем случае без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{m \to \infty} t_m = t^*. \tag{5.4.4}$$

Поскольку $y(t)$ непрерывна, то $\lim\limits_{m \to \infty} y(t_m) = 0 = y(t^*)$.

С другой стороны, в силу $y(t_m) = y(t_{m+1}) = 0$ по теореме Ролля между точками t_m и t_{m+1} найдется точка θ_m такая, что $\dot{y}(\theta_m) = 0$. Тогда для непрерывно дифференцируемой $y(t)$ из (5.4.4) следует, что $\dot{y}(t^*) = 0$.

Из условий $y(t^*) = 0$ и $\dot{y}(t^*) = 0$ по теореме единственности решения задачи Коши получаем, что $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$. Однако это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.4.1 (Штурма о сравнении)

Пусть t_1 и t_2 соседние несовпадающие нули некоторого нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \tag{5.4.5}$$

и пусть функции $a_0(t)$ и $A_0(t)$ непрерывны и таковы, что $A_0(t) \geq a_0(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ уравнения

$$\ddot{z} + A_0(t)z = 0\,, \tag{5.4.6}$$

имеет нуль хотя бы в одной точке отрезка $[t_1, t_2]$, при этом оно либо обращается в нуль на (t_1, t_2), либо

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t_1) = z(t_2) = 0\,, \\ A_0(t) \equiv a_0(t) \quad \textbf{на} \quad [t_1, t_2]\,. \end{array} \right.$$

Доказательство.

Пусть $y(t_1) = y(t_2) = 0$ и, кроме того, $y(t) \neq 0 \ \forall t \in (t_1, t_2)$. Без потери общности также считаем, что на этом интервале $y(t) > 0$ (иначе можно взять решение $-y(t)$). Тогда

$$\dot{y}(t_1) = \lim_{t \to t_1 + 0} \frac{y(t)}{t - t_1} \geq 0 \ , \quad \dot{y}(t_2) = \lim_{t \to t_2 - 0} \frac{y(t)}{t - t_2} \leq 0 \ .$$

В силу теоремы единственности эти производные не могут быть нулевыми и потому $\dot{y}(t_1) > 0$ и $\dot{y}(t_2) < 0$ (иначе решение получилось бы тривиальным).

Пусть $z(t)$ – некоторое нетривиальное решение уравнения (5.4.6). Умножая обе части уравнения (5.4.5) на $z(t)$, а обе части (5.4.6) – на $-y(t)$ и складывая их почленно, получим

$$\ddot{y}z - \ddot{z}y = \Big(A_0(t) - a_0(t)\Big)y(t)z(t)\,.$$

Прибавляя и вычитая $\dot{y}\,\dot{z}$ в левой части, полученное равенство можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\big(\dot{y}z - \dot{z}y\big) = \Big(A_0(t) - a_0(t)\Big)y(t)z(t)\,.$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_1 до t_2 и учитывая, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$, получаем

$$\dot{y}(t_2)z(t_2) - \dot{y}(t_1)z(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(A_0(t) - a_0(t)\Big)y(t)z(t)\,dt\,. \quad (5.4.7)$$

Если предположить, что теорема Штурма не верна, то должна реализоваться одна из следующих трех возможностей:

$$
\begin{array}{lll}
1^\circ. & z(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1,\, t_2]\,. & \\
2^\circ. & z(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1,\, t_2), & z(t_2) = 0\,. \\
3^\circ. & z(t) > 0 \quad \forall t \in (t_1,\, t_2], & z(t_1) = 0\,.
\end{array}
$$

Правая часть равенства (5.4.7) во всех трех случаях очевидно неотрицательная, в силу

$$A_0(t) \geq a_0(t), \quad y(t)z(t) \geq 0 \;\; \forall t \in [t_1, t_2]\,,$$

а левая – отрицательная, поскольку $\dot{y}(t_1) > 0$, $\dot{y}(t_2) < 0$ и $|z(t_1)| + |z(t_2)| > 0$, а $z(t) = 0$ или в точке t_1 или в t_2. Это противоречие показывает, что первое утверждение теоремы Штурма верно.

Наконец, при $z(t_1) = z(t_2) = 0$ из (5.4.7) в силу непрерывности $A_0(t) - a_0(t) \geq 0$ следует $A_0(t) \equiv a_0(t)$ на $[t_1,\, t_2]$.

Теорема доказана.

Следствие 5.4.1 **На отрезке, где $a_0(t) \le 0$, любое нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (5.4.1) может обратиться в нуль не более, чем в одной точке.**

Доказательство.

Применим теорему Штурма к паре уравнений

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{z} + 0\,z = 0\,.$$

Предположим, что первое из них имеет на Ω по крайней мере два нуля $t_1 < t_2$. Тогда в силу условия $a_0(t) \le 0 \quad \forall t \in \Omega$ каждое нетривиальное решение второго уравнения в силу теоремы 5.4.1 обязано иметь хотя бы один нуль на $[t_1,\, t_2]$.

Однако легко видеть, что $z(t) \equiv 1$ – нетривиальное решение второго уравнения – такого нуля не имеет. Следовательно, предположение о том, что первое уравнение может иметь более одного нуля, не верное.

Следствие доказано.

Следствие 5.4.2 (О чередовании нулей)

В промежутке между любыми двумя соседними нулями одного из двух линейно независимых решений уравнения (5.4.1) содержится ровно один нуль другого решения.

Доказательство.

Пусть $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно независимые, нетривиальные решения уравнения (5.4.1). Применим теорему Штурма к паре уравнений вида

$$\ddot{y}_{(1)} + a_0(t)y_{(1)} = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{y}_{(2)} + a_0(t)y_{(2)} = 0\,.$$

(Мы формально положили $a_0(t) \equiv A_0(t)$) .

Если t_1 и t_2 соседние несовпадающие нули первого уравнения, то между ними имеется хотя бы один нуль второго уравнения t^*. Общих нулей у $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ быть не может. Действительно, если, например, $y_{(1)}(t^*) = y_{(2)}(t^*) = 0$, то вронскиан $W(t^*) = 0$ и решения $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно зависимые. Поэтому $t^* \in (t_1,\, t_2)$.

Остается доказать, что t^* единственное. Предположим, что существует также t^{**} такое, что

$$y_{(2)}(t^{**}) = 0, \quad t_1 < t^* < t^{**} < t_2\ .$$

Тогда по теореме Штурма у $y_{(1)}(t)$ должен иметься нуль на $(t^*,\, t^{**})$, что противоречит предположению о том, что t_1 и t_2 соседние нули решения $y_{(1)}(t)$. Значит $t^* = t^{**}$.

Следствие доказано.

Отметим, что для линейных уравнений порядка большего, чем два $(n > 2)$, следствие 5.4.2, вообще говоря, не верно. Например, для линейно независимых решений $y_{(1)}(t) = \sin t$ и $y_{(2)}(t) \equiv 1$ уравнения $\dddot{y} + \dot{y} = 0$ чередования нулей нет.

Следствие 5.4.3 **Если некоторое нетривиальное решение уравнения (5.4.1) имеет бесконечное число нулей, то и каждое его нетривиальное решение имеет бесконечное число нулей.**

Доказательство.

Вытекает непосредственно из утверждения следствия 5.4.2.

Следствие доказано.

Исследование решений дифференциальных уравнений на практике осложняется тем обстоятельством, что малые изменения в записи уравнения или в дополнительных условиях (начальных, краевых и т.д.), вообще говоря, могут приводить к не малым изменениям в решениях.

В этих случаях принято говорить о нерегулярности (некорректности) постановки задачи, а сами малые изменения условий называть *сингулярными возмущениями.*

Хотя изучение свойств таких задач и методов их решений не является составной частью нашего курса, ввиду важности их для приложений представляется целесообразным рассмотреть конкретный пример задачи содержащей в своем условии сингулярное возмущение.

Задача 5.5.2 Найти $y(t,\varepsilon)$ – решение краевой задачи, где ε – малый по модулю параметр и $t \in [0,1]$,

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} = F(t)\,, \tag{5.5.11}$$

при условиях:

$$y(0) = 1 \quad \text{и} \quad y(1) = 2 \tag{5.5.12}$$

для

а) $F(t) = 2$,
б) $F(t) = 1$.

Решение. 1°. Рассмотрим вначале случай $F(t) = 2$.

Корнями характеристического уравнения $\varepsilon\lambda^2 + \lambda = 0$, являются числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$, и общее решение однородного уравнения будет

$$y(t,\varepsilon) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) .$$

Поскольку для $\lambda_1 = 0$ мы имеем резонансный случай, то в качестве частного решения неоднородного уравнения (5.5.11) можно взять функцию $y(t) = 2t$. Тогда его общее решение будет

$$y(t,\varepsilon) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + 2t ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Решим теперь краевую задачу. Для определения значений констант C_1 и C_2 используем краевые условия (5.5.12), из которых следует, что

$$\left\{\begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 1, \\ C_1 & + & \exp\left(-\dfrac{t}{\varepsilon}\right) C_2 + 2 & = & 2. \end{array}\right.$$

Откуда получаем

$$C_1 = \frac{1}{1 - \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} \qquad C_2 = \frac{1}{1 - \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}$$

и находим решение краевой задачи

$$y(t,\varepsilon) = \frac{1}{1-\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{1}{1-\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + 2t \ ,$$

где $t \in [\,0,1]$.

2°. Исследуем теперь вид найденного решения краевой задачи. Имеем при $\varepsilon > 0$

$$\dot{y}(t,\varepsilon) = \frac{1}{1-\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} - \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + 2 \ ,$$

Откуда следует, что $\dot{y}(t,\varepsilon) = 0$ при

$$t = -\varepsilon \ln\left(2\varepsilon\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right)$$

А вторая производная $\ddot{y}(t,\varepsilon) > 0 \quad \forall t \in [0,1]$. Следовательно, функция $y(t,\varepsilon)$ строго выпукла вниз и имеет минимум на интервале $(0,1)$.

Графики функций $y(t,\varepsilon)$ для

$$\varepsilon = 0.25,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.003$$

показаны на рис. 1.

Исследование при $\varepsilon < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю при помощи замены переменной t на $-t$. Графики функций $y(t,\varepsilon)$ для

$$\varepsilon = -0.25,\ -0.1,\ -0.01,\ -0.003$$

также приведены на рис. 1.

3°. Отметим важный факт, следующий из предыдущего рассмотрения:

> предельный переход $\varepsilon \to 0$, выполненный в *решении* задачи (5.5.11) – (5.5.12) приводит к результату, отличающемуся от результата предельного перехода в *условии* этой задачи.

Действительно, если в уравнении (5.5.11) положить $\varepsilon = 0$ и оставить лишь одно краевое условие $y(0) = 1$, то мы получим решение для уравнения первого порядка $\dot{y} = 1$ вида $y(t) = 2t$.

Эта функция является решением соответствующей задачи Коши для уравнения с $\varepsilon = 0$. При этом решение исходного уравнения $y(t, \varepsilon)$ сходится к решению задачи Коши на всем полуинтервале $(0, 1]$, но неравномерно.

Данное решение будет близко к решению задачи (5.5.11) – (5.5.12) везде на отрезке $[\,0, 1\,]$, за исключением малой окрестности точки $t = 0$, где решения будут значительно отличаться.

Эту окрестность принято называть *пограничным слоем*, а отмеченное различие решений – *поведением типа пограничного слоя.* Математически природа эффекта пограничного слоя вполне очевидна: возмущенное уравнение (то есть уравнение (5.5.11) с $\varepsilon \neq 0$) есть уравнение второго порядка, в то время как невозмущенное является уравнением первого порядка, решения которого могут не удовлетворять двум различным краевым условиям.

В заключение обратим внимание на то, что

во-первых, эффект пограничного слоя возникает не при любом возмущении. Например, в случае б) при $F(t) = 1$ (проверьте это самостоятельно) решение невозмущенной задачи имеет вид $y(t) = t + 1$ и является как решением каждой из двух невозмущенных задач Коши с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y(1) = 2$, так и решением краевой возмущенной задачи при любом ε.

Решение получено.

И, во-вторых, погранслой образуется у решения $y(t, \varepsilon)$ в разных местах отрезка $[0, 1]$ при разных предельных переходах: $\varepsilon \to +0$ и $\varepsilon \to -0$.

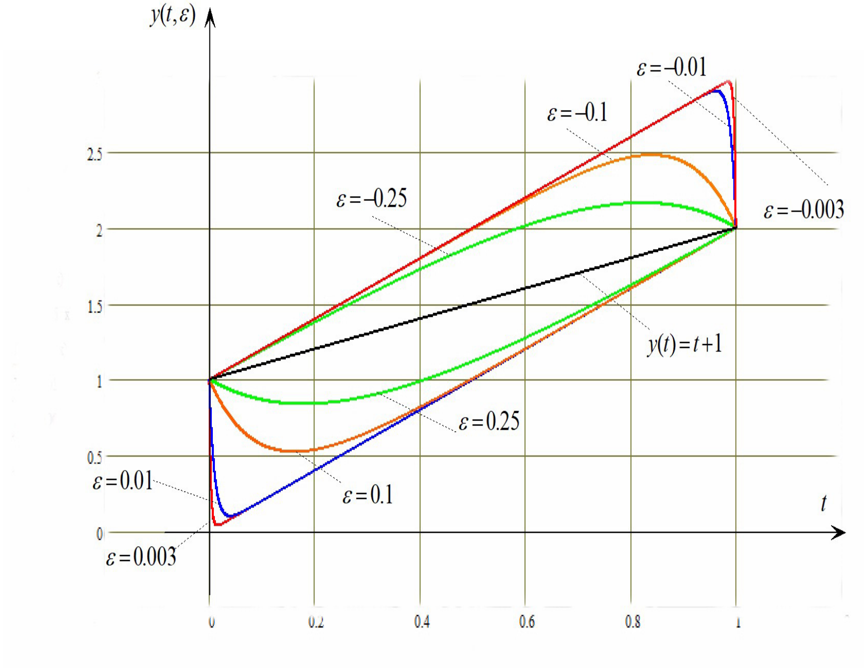

Рис. 1. Графики решений краевой задачи для различных ε.