Устойчивость положения равновесия автономной системы

Было отмечено, что достижение особых точек при движении по фазовым траекториям возможно лишь при $t \to \infty$. Это означает, что изучение поведения решений системы (6.1.1) в окрестностях таких точек требует исследования их поведения при $t \to \infty$. Одним из самых важных пунктов этого исследования является ответ на вопрос: в каких случаях малые изменения начальных условий для системы (6.1.1) приводят к малым изменениям решений на полубесконечных интервалах $(\,-\infty, \underline{\Delta}\,)$ и $(\,\overline{\Delta}, +\infty\,)$. Получением ответа на этот вопрос и занимается *математическая теория устойчивости.*

Пусть $x(t,a)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x)\,, \quad x(t_0) = a \in \Omega\,, \tag{6.2.1}$$

такое, что $x(t,a) \quad \forall t \in T$ целиком находится в некоторой окрестности x_0 – положения равновесия (особого решения) системы (6.1.1), т.е. точки, для которой $F(x_0) = o$.

Дадим следующие определения:

Определение 6.2.1	Положение равновесия x_0 называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если 1°. Найдется $\Delta > 0$ такое, что решение $x(t,a)$ задачи (6.2.1) существует на T для любых a таких, что $\lvert a - x_0 \rvert < \Delta$. 2°. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ такое, что, если $$\lvert a - x_0 \rvert < \delta_\varepsilon,$$ то $\lvert x(t,a) - x_0 \rvert < \varepsilon \quad \forall\, t \in T$. Иначе положение равновесия будем называть *неустойчивым.*

Определение 6.2.2	Положение равновесия x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если 1°. Оно устойчиво по Ляпунову. 2°. При достаточно малых $\mid a - x_0 \mid$ $$\lim_{t\to\infty} x(t,a) = x_0.$$

Для данных определений сделаем следующие замечания.

Во-первых, мы рассматриваем устойчивость по отношению лишь к *малым* отклонениям от положений равновесия.

Во-вторых, использование одних лишь определений 6.2.1 и 6.2.2 для исследования устойчивости эффективно в тех случаях, когда возможно либо построение общего решения, либо выявление таких свойств решений, как ограниченность, возрастание или убывание.

Следует также обратить внимание, что пункты 1° и 2° в определении 6.2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°. Эту особенность определения 6.2.2 иллюстрируют пример 6.1.1 и

Пример 6.2.1 — Устойчиво ли нулевое решение уравнения $\dot{x} = -x^2$?

Решение. — Очевидно, что $x(t) = 0$ есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t + C},$$

где C – произвольная константа.

Заметим, что хотя $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при $t = -C$ интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту и $\forall C < 0$ из условия $|x(0)| < \delta$ условие $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in (0, +\infty)$ следовать не будет.

Решение получено.

Нами были получены формы общего решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь проблему устойчивости положений равновесия для систем (6.1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \,, \tag{6.2.2}$$

$$\text{где} \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| .$$

Здесь числа a_{ij} – комплексные константы.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное преобразование в унитарном пространстве U^n, имеющее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, среди которых, быть может, имеются равные.

Тогда для положения равновесия $x(t) = o$ справедлива

Теорема 6.2.1

1°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall j = [1, n]$, **то** $x(t) = o$ **асимптотически устойчиво.**

2°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j \leq 0 \ \ \forall j = [1, n]$ **и для каждого** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ **его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **устойчиво по Ляпунову.**

3°. Если имеется хотя бы одно λ **с** $\mathrm{Re}\lambda > 0$ **или хотя бы для одного** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda = 0$ **кратность больше размерности собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **неустойчиво.**

Доказательство.

По теореме 3.2.4 общее решение системы (6.2.2) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{kj}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall k = [1, n] \,, \tag{6.2.3}$$

где $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots \ \lambda_q$ – все *различные* собственные значения матрицы $\|A\|$, а $P_{kj}(t)$ – алгебраический многочлен, степень которого на единицу меньше длины самой длинной из жордановых цепочек, отвечающих собственному значению λ_j и коэффициенты которого выражаются через n произвольных комплексных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.
Напомним также, что для $\lambda = \alpha + i\beta$ справедливы равенства

$$P(t)e^{\lambda t} = P(t)e^{\alpha t} \left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right) \,,$$

$$\text{причем} \quad |\cos\beta t + i\sin\beta t\,| \equiv 1 \,.$$

1°. Пусть $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall\, j = [1, n]$, тогда (известно из курса математического анализа)

$$\lim_{t\to+\infty} P_{kj}(t)e^{\lambda_j t} = 0 \quad \forall k = [1, n] \,, \, \forall j = [1, q] \,.$$

Тогда каждое решение системы (6.2.2) при $t \to +\infty$ стремится к нулю и, следовательно, ограничено на $t \in [t_0, +\infty)$.

Эти утверждения очевидно верны и для фундаментальных (базисных) решений, служащих столбцами фундаментальной матрицы $\|X\|$, норма которой также оказывается ограниченной, то есть

$$\exists M > 0 \, : \, \langle \, \|X\| \, \rangle \le M.$$

А поскольку в наших обозначениях для фундаментальной матрицы

$$\|x(t,a)\| = \|X\|\|a\| \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\|x(t,a)\|\rangle \leq \langle\|X\|\rangle \langle\|a\|\rangle \ ,$$

то из $\langle\,\|a\|\,\rangle \leq \delta_\varepsilon$ получаем, что $\langle\,\|x(t,a)\|\,\rangle \leq \varepsilon$ при

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \qquad \forall \varepsilon > 0\,.$$

Откуда следует устойчивость $x = o$ по Ляпунову.

Наконец, из условия $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t,a) = o$ получаем, что $x = o$ устойчиво асимптотически.

2°. В этом случае слагаемые в (6.2.3), для которых $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, ограничены по тем же соображениям, что и в пункте 1°.

Слагаемым с $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ соответствуют в (6.2.3) многочлены нулевой степени, поскольку предполагается, что кратность таких собственных значений равна размерности собственного подпространства (в U^n существует базис из собственных векторов). Значит все жордановы цепочки имеют длину 1, а многочлены $P_{kj}(t)$ суть нулевой степени, т.е. константы и, значит, ограничены.

Получив те же оценки, что и в случае 1°, приходим к заключению о справедливости пункта 2°.

3°. Допустим, что $\mathrm{Re}\lambda_{j^*} > 0$ для некоторого λ_{j^*}. Тогда соответствующее слагаемое в (6.2.3) неограничено на $t \in [t_0, +\infty)$.
У задачи Коши (6.2.1) всегда есть вещественное неограниченное решение $x(t,a)$. Действительно, если $x(t,a)$ неограниченное и комплексное, то хотя бы одно из вещественных решений $\mathrm{Re}\,x(t,a)$ или $\mathrm{Im}\,x(t,a)$ обязательно неограниченное.
Пусть $\delta > 0$ – любое и сколь угодно малое. Тогда при $C = \dfrac{\delta}{2|a|}$ мы имеем неограниченное решение $y(t) = Cx(t,a)$, однако для которого

$$|\,y(t_0)| = |Cx(t_0,a)| = \left|\frac{\delta}{2|a|}a\right| = \frac{\delta}{2}.$$

Значит положение равновесия $x = o$ неустойчивое.

Если же $\mathrm{Re}\lambda_j \le 0 \ \forall j$, но имеется собственное значение с $\mathrm{Re}\lambda_{j^*} = 0$ для некоторого λ_{j^*}, кратность которого больше размерности собственного подпространства, то из теоремы 3.2.4 следует, что в формуле (6.2.3) имеется многочлен степени не меньшей, чем 1, старший коэффициент которого не нулевой. И, поскольку $\left| e^{\lambda_{j^*} t} \right| = 1$, это решение неограниченно, а положение равновесия неустойчиво.

Теорема доказана.

Вернемся теперь к рассмотрению системы (6.2.1) в предположении, что $x_0 = o$ является ее положением равновесия, то есть $F(o) = o$.

Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость.

Первый подход носит название исследования *устойчивости по линейному приближению* и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x_0 = o$. Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в неразвернутом матричном виде как

$$\|F(x)\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,,$$

где матрица $\|A\|$ имеет элементы α_{ij} такие, что $\alpha_{ij} = \left.\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x=o}$, а вектор-функция $R(x)$ не только равна o при $x = o$, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to o} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0 \,, \qquad \text{где} \quad |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \,.$$

Тогда система уравнений (6.2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,, \tag{6.2.4}$$

и оказывается справедливой

Теорема 6.2.2 (Об устойчивости по линейному приближению)

1°. **Если $\|A\|$ – матрица системы (6.2.4) такова, что $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall j$, то решение этой системы $x(t) = o$ асимптотически устойчиво.**

2°. **Если матрица $\|A\|$ имеет хотя бы одно λ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то решение системы (6.2.4) $x(t) = o$ неустойчиво.**

3°. **Если $\max\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j = 0$, то устойчивость (или неустойчивость) $x(t) = o$ зависит не только от матрицы $\|A\|$, но и от вектор-функции $R(x)$.**

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для того, чтобы делать заключения об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия $x = o$ системы (6.2.4). Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия.*

Положения равновесия, для которых оказываются справедливыми условия пункта 3°, называются *негрубыми положениями равновесия*. Исследование особых решений в этом случае можно попытаться выполнить альтернативным методом, разработанным А.М. Ляпуновым, основой которого служат следующие определения и теоремы.

Определение 6.2.3	Функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(o) = 0$, называется в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ – *положительно определенной*, если $\Phi(x) > 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *отрицательно определенной*, если $\Phi(x) < 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *неотрицательной*, если $\Phi(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *неположительной*, если $\Phi(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$.

Определение 6.2.4

Производной в силу системы (6.2.1) *от функции* $\Phi(x)$ называется выражение

$$\grave{\Phi}(x) = \|\,\operatorname{grad}\Phi(x)\,\|^{\mathrm{T}}\,\|F(x)\|\ =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} F_j(x)\,.$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы [1] (6.2.1) есть полная производная по t от сложной функции $\Phi(x(t))$, если $x(t)$ – решение этой системы. При этом в произвольной точке x для вычисления значений производной в силу системы решать саму систему не требуется.

[1] В формулах производную в силу системы будем помечать левым наклонным верхним штрихом, например, $\grave{F}$.

Определение 6.2.5	Положительно определенная в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ функция $V(x)$ называется *функцией А.М. Ляпунова*, если $$\grave{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \dot{U}\,,$$ где $\grave{V}(x)$ – производная в силу системы (6.2.4).

Исследование системы (6.2.1) по методу Ляпунова базируется на следующих трех теоремах.

Теорема 6.2.3 (Ляпунова об устойчивости)	**Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.**

Другими словами, согласно теореме 6.2.3, неположительность производной в силу системы (6.2.4) от функции Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия.

Теорема 6.2.4 (Об асимптотической устойчивости)	**Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что ее производная в силу системы (6.2.1) $\grave{V}(x)$ отрицательно определена в этой окрестности, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.**

Доказательство неустойчивости положения равновесия может основываться на использовании специальной функции $W(x)$, называемой *функцией Н.Г. Четаева.*

Пусть U некоторая окрестность $x = o$, а $\Omega \subset U$ такая, что $x = o$ – граничная точка Ω.

`Теорема 6.2.5 (Четаева о неустойчивости)` **Если существует функция $W(x)$ непрерывно дифференцируемая на Ω такая, что**

$$W(x) > 0\,, \quad \grave{W}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega\,,$$

где $\grave{W}(x)$ производная в силу системы, и все точки $x^* \in \Omega$, в которых $W(x^*) = 0$, суть граничные точки Ω.

Тогда положение равновесия $x = o$ неустойчиво.

Как уже отмечалось ранее, условия сформулированные в теоремах 6.2.3–6.2.5 позволяют делать заключения о типе устойчивости негрубых положений равновесия, когда теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. При этом важно, что решения системы (6.2.4) для получения этих заключений, находить не требуется.

С другой стороны, общей методики построения функций $V(x)$ и $W(x)$ не имеется, и для этой цели приходится использовать специфику решаемой задачи. Например, доказано, что функция Ляпунова всегда существует в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия. Однако в более общем случае такие функции имеются не для любого класса систем дифференциальных уравнений.

Особенности практического применения методов Ляпунова и Четаева проиллюстрируем на примере решения двух следующих задач.

Задача 6.2.2 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x}_1 & = & -x_1^3 & + & x_2^2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1^5 & - & x_1 x_2\,. \end{array} \right. \qquad (6.2.5)$$

Решение. 1°. У данной системы единственное положение равновесия – начало координат. Матрица $\|A\|$ в начале координат очевидно нулевая и теорема 6.2.2 здесь не применима.

2°. Покажем, что функция $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2.4. Действительно, она положительно определенная в любой окрестности начала координат и $V(0,0) = 0$.

Ее производная в силу системы (6.2.5) равна

$$\grave{V}(x_1, x_2) = 2x_1\left(-x_1^3 + x_2^2\right) + 2x_2\left(-x_2^5 - x_1 x_2\right) =$$

$$= -2x_1^4 - 2x_2^6$$

и является отрицательно определенной в любой окрестности начала координат.

Решение получено. Тогда по теореме 6.2.4 $x = o$ есть асимптотически устойчивое положение равновесия для системы (6.2.5).

Задача 6.2.3

Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5\,, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2\,. \end{cases} \qquad (6.2.6)$$

Решение.

1°. У системы (6.2.6) начало координат единственное положение равновесия. Матрица $\|A\|$ также нулевая и потому теорема 6.2.2 не применима.

2°. Пусть

$$U = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\},$$

$$\text{а } \Omega = \{(x_1; x_2) \in U : x_1 > x_2^2\}\,.$$

Покажем, что функция $W(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ удовлетворяет в Ω условиям теоремы 6.2.5. Действительно, здесь она положительно определенная и $W(0, 0) = 0$. (см. рис. 6.2).

Ее производная в силу системы (6.2.6)

$$\grave{W}(x_1, x_2) = 2x_1\left(x_1^2 + 2x_2^5\right) - 4x_2^3 x_1 x_2^2 = 2x_1^3$$

является положительно определенной в Ω, а начало координат есть единственная точка, в которой $\grave{W}(x_1, x_2) = 0$.

Тогда по теореме 6.2.5 получаем, что начало координат есть неустойчивое положение равновесия для системы (6.2.6).

Решение получено.

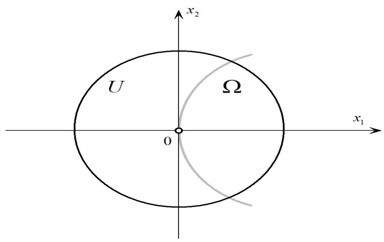

Рис. 1. К решению задачи 6.2.2