ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Напомним, что по определению *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*, называется выражение вида

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

где x - *независимая* переменная, имеющая значения на некотором промежутке X *вещественной* оси.

Заданная *непрерывная* функция $f(x,y)$ от векторного аргумента $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \Omega$, где Ω - область в E^2 − двумерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом. Наконец, *искомая* $y(x)$ определенная на X, *комплекснозначная* функция аргумента x, которая при подстановке в уравнение (1) превращает его в тождество.

В это определение необходимо включить дополнительно:

1) условие "согласованности по гладкости", по которому из непрерывности функции $f(x,y)$, в силу (1) следует, что функция $y(x)$, должна быть *непрерывно дифференцируемой.*
2) условие "согласованности множеств X и Ω ", согласно которому $\forall x \in X: \left\| \begin{matrix} x \\ y(x) \end{matrix} \right\| \in \Omega$.

Процесс решения уравнения (1), то есть, нахождения всех его частных решений основывается на использовании теорем математического анализа, описывающих дифференциальные свойства функций.

Нередко можно встретить фразу:

> "Известно, что все решения уравнения $y' = \lambda y$ описываются формулой $y = Ce^{\lambda x}$, где C − произвольная константа".

Выясним, что в этой фразе означает слово "известно".

1) Воспользуемся тем, что производную функцию можно представить как отношение дифференциалов dy и dx. Тогда исходное уравнение будет $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$.

2) Преобразуем его к виду $\frac{dy}{y} = \lambda\, dx$. Заметим, что это преобразование не равносильное. Очевидно, что функция $y(x) \equiv 0$ является решением исходного решения, но не удовлетворяет вновь полученному. Запомним это, и будем пока считать, что y не обращается в ноль.

   По теореме об инвариантности формы первого дифференциала (т.е. вид первого дифференциала не зависит от того, является y функцией или независимой переменной) данное равенство можно записать так:

$$d \ln|\, y \,| = d(\lambda x)\,.$$

3) Если дифференциалы двух функций равны, то, как следует из соответствующей теоремы, сами функции отличаются на произвольную константу. Можно было бы обозначить эту константу одной буквой, но мы будем считать, что она равна $\ln D$, где D − произвольное, строго положительное число. Таким образом,

$$\ln|\,y\,| - \ln D = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{D}\right| = \lambda x \quad \Rightarrow \quad |\,y\,| = De^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y = \bar{D}\,e^{\lambda x},$$

где $\bar{D}$ любое, не равное 0, число.

4) Эта формула уже похожа на рассматриваемое утверждение, но она − не совсем то, что надо. В утверждении сказано, что C любое, а у нас оно получилось, что C не равно нулю.

Однако, если вспомнить, что $y(x) \equiv 0$ − также решение исходного уравнения, то, объединив оба случая, мы приходим к формуле

$$y = Ce^{\lambda x} \quad \forall C\,.$$

Теперь рассмотрим некоторые частные виды уравнения $y' = f(x, y)$, которые можно интегрировать в квадратурах.

Напомним, что термин *интегрирование в квадратурах* означает возможность получения решения в форме конечного числа суперпозиций элементарных функций и римановских (определенных) интегралов с переменными пределами интегрирования.

Пример: уравнение $y' = e^{x^2}$ имеет решение, записанное в квадратурах, вида

$$y(x) = \int_a^x e^{u^2} du \qquad \forall a \in \mathbf{R}.$$

В то время как, уравнение $y' = y^2 + x$ в квадратурах не решается.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{2}$$

принято называть *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Они всегда решаются в квадратурах по следующей двухэтапной схеме:

1) Решаем уравнение $g(y) = 0$. Пусть его корнями оказываются числа: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots$. Проверяем, являются ли функции $y(x) = \alpha_k$ частными решениями уравнения (2).

2) Теперь считаем, что $g(y) \neq 0$ и решаем уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$, приводя его к виду $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$. Последнее уравнение интегрируется в квадратурах, и решения имеют вид

$$\int\limits_A^y \frac{du}{g(u)} = \int\limits_B^x f(v)\,dv + C \,,$$

где константы A и B фиксированные, а C − произвольная постоянная.

Задача 1. Решить уравнение $yy'\cos x = (1-y)\sin x$.

Решение: 1) Заметим, что $y(x)=1$ - решение этого уравнения, а условие $\cos x = 0$ решений не дает.

2) Теперь, разделив переменные, получим уравнение $\dfrac{y}{1-y}dy = \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$.

3) В левой части функцию раскладываем на простейшие дроби, а в правой образуем полный дифференциал. Получаем с учетом изменения знаков

$$\left(1+\frac{1}{y-1}\right)dy = \frac{d\cos x}{\cos x} \qquad \text{или} \qquad dy + \frac{d(y-1)}{y-1} - d\ln|\cos x| = 0\,.$$

4) Откуда при $D>0$

$$y+\ln|y-1| = \ln|\cos x| + \ln D \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left|\frac{D\cos x}{y-1}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{D\cos x}{y-1}\right| = e^{y}\,.$$

5) Наконец, вспоминая, что $y(x)=1$ - также частное решение, получим ответ:

$$y-1 = Ce^{-y}\cos x \quad \forall C\,.$$

Однородные уравнения

К однородным уравнениям относятся уравнения вида $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Эти уравнения приводятся к случаю разделяющихся переменных заменой неизвестной функцией по формуле $y(x) = x\,u(x)$.

Действительно, в этом случае $y' = (x\,u)' = u + x\,u'$ и уравнение относительно новой неизвестной $u(x)$ принимает вид $u + x\,u' = F(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = F(u) - u$, где переменные разделяются.

Пример: пусть, надо решить уравнение $y' = \frac{2x+3y}{x+y}$. Делим в правой части числитель и знаменатель на x, делаем замену $u = \frac{y}{x}$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + x\,u' = \frac{2+3u}{1+u} \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx} = 2 - u + \frac{u}{1+u}.$$

Линейные уравнения первого порядка

Линейными уравнениями первого порядка называются уравнения вида:

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{3}$$

В уравнении (3) функции $a(x)$ и $b(x)$ известные, *непрерывные* и, вообще говоря, *нелинейные*. Термин *линейный* относится в этом уравнении только к неизвестной функции и ее производной.

В случае, если $b(x) = 0$, уравнение (3) будем называть *однородным*, иначе - *неоднородным*.

Покажем, что уравнение (3) всегда разрешимо в квадратурах.

Вначале воспользуемся теоремой, о том, что

> **Общее решение неоднородного уравнения (3) равно общему решению однородного плюс частное решение неоднородного.**

Однородное уравнение в данном случае имеет вид

$$y'+a(x)y=0\,. \tag{4}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно

$$\frac{dy}{dx}=-a(x)y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y}=-a(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad y(x)=C\exp\left(-\int\limits_{\alpha}^{x}a(u)\,du\right) \quad \forall C\in\mathbf{R}\,. \tag{5}$$

Здесь C любое, поскольку $y=0$ есть также частное решение однородного уравнения. Интеграл в последней формуле существует, поскольку функция $a(x)$ непрерывная.

Для того чтобы получить общее решение неоднородного уравнения, осталось найти *частное* решение неоднородного. Заметим, что это частное решение может быть *любым*.

Обозначим экспоненту в формуле (5) как $y_0(x)$. Тогда, согласно рекомендации Ж.Лагранжа, $y^*(x)$ - частное решение (3) - можно искать в виде $y^*(x) = C(x)y_0(x)$, где $C(x)$ - некоторая неизвестная *функция*.

Функцию $C(x)$ можно найти, поставив $y^*(x)$ в (3),

$$(Cy_0)'+aCy_0=b \quad\Rightarrow\quad C'y_0+Cy'_0+aCy_0=b \quad\Rightarrow\quad C'y_0+C(y'_0+ay_0)=b$$

В последнем равенстве выражение в скобках равно нулевой функции, поскольку $y_0(x)$ − частное решение уравнения (4). Таким образом

$$C'(x)=\frac{b(x)}{y_0(x)} \quad\Rightarrow\quad C(x)=\int\limits_{\beta}^{x}\frac{b(u)}{y_0(u)}du \quad\Rightarrow\quad y^*(x)=y_0(x)\int\limits_{\beta}^{x}\frac{b(u)}{y_0(u)}du\,.$$

Таким образом, формула общего решения неоднородного уравнения (3) будет иметь вид:
\

$$y(x)=Cy_0(x)+y_0(x)\int\limits_{\beta}^{x}\frac{b(u)}{y_0(u)}du \qquad \forall C,$$

где $y_0(x)=\exp\left(-\int\limits_{\alpha}^{x}a(v)\,dv\right)$.

Опять же отметим, что в полученной формуле константы α и β фиксированные, а константа C − произвольная.

Задача 2. Решить уравнение $y' + \operatorname{tg} x\, y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение: 1) Решим вначале *однородное* уравнение $y' + \operatorname{tg} x\, y = 0$.
Заметим, что у него есть очевидное решение $y = 0$.

2) Если $y \neq 0$, то $\dfrac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx$. Или

$$d \ln|\, y\,| = \frac{d\cos x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad d\ln|\, y\,| = d\ln|\cos x\,| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\, y\,| = \ln|\cos x\,| + \ln D \quad \Rightarrow \quad |\, y\,| = D|\cos x\,|, \quad D > 0.$$

Откуда, $y = C\cos x \quad \forall C$.

3) Найдем частное решение *неоднородного* уравнения методом *вариации постоянной.*

Пусть это решение имеет вид: $y^*(x) = C(x)\cos x$. Тогда

$$C'\cos x - C\sin x + \operatorname{tg} x C\cos x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x,$$

Значит, $y^*(x) = \operatorname{tg} x \cos x$ и, окончательно, $y^*(x) = \sin x$

\

В итоге, общее решение будет: $y = C\cos x + \sin x \quad \forall C$.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется нелинейное уравнение вида:

$$y'+a(x)y=b(x)y^p \ . \tag{6}$$

где p - параметр.

Это уравнение сводится к линейному, 1-го порядка, а, значит, интегрируется в квадратурах для любых непрерывных функциях $a(x)$ и $b(x)$.

Заметим вначале, что при $p=0$ и $p=1$ уравнение (6) линейное. И при $p>0$ уравнение (6) умеет решение $y(x)=0$.

При $p\neq 0$, $p\neq 1$ и $y(x)\neq 0$ имеем $\dfrac{y'}{y^p}+a(x)\dfrac{1}{y^{p-1}}=b(x)$. Вводя новую неизвестную функцию $u=\dfrac{1}{y^{p-1}}$, для которой $u'=(1-p)\dfrac{y'}{y^p}$ приходим к линейному уравнению первого порядка

$$u'+(1-p)a(x)u=(1-p)b(x)\,.$$

Задача 3. Решить уравнение $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$.

Решение. 1) Заметим, что для данного уравнения $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Поэтому его можно записать в виде $\frac{dx}{dy} = \left(-\frac{1}{y} \right) x + (2 \ln y) x^2$ и искать решение как функцию $x(y)$.

2) Это - уравнение Бернулли с $p = 2$. Поэтому, сделав замену . $u(y) = \frac{1}{x(y)}$, получим линейное уравнение 1-го порядка

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = -2 \ln y . \tag{7}$$

3) Однородное уравнение решаем методом разделения переменных

$$\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=0 \qquad \Rightarrow \qquad u(y)=Cy\,.$$

4) Неоднородное решаем методом вариации постоянной, т.е. ищем решение в виде $u^*(y)=C(y)y$.

Если подставить эту формулу в неоднородное уравнение (7), то получим

$$C'\,y+C-\frac{Cy}{y}=-2\ln y \qquad \Rightarrow \qquad C'=-\frac{2}{y}\ln y \qquad \Rightarrow \qquad C(y)=-\ln^2 y.$$

Значит, $u^*(y)=C(y)y=-y\ln^2 y.$

5) В итоге, общее решение неоднородного будет $u(y)=Cy-y\ln^2 y$. И, если вернуться к исходным переменным, то

$$\frac{1}{x(y)}=Cy-y\ln^2 y \qquad \Rightarrow \qquad xy(C-\ln^2 y)=1\,.$$

Метод изоклин

Напомним, что использование для записи решения дифференциального уравнения сочетания конечного числа операций над элементарными функциями и их суперпозиций с выражениями, содержащими определенные интегралы с переменным верхним пределом, принято называть *интегрированием в квадратурах*.

При этом, в общем случае и интегрирование в квадратурах не позволяет получать решения уравнения

$$y' = f(x, y).$$

Жозеф Лиувилль показал, например, что уравнение $y' = y^2 + x$ в квадратурах неразрешимо.

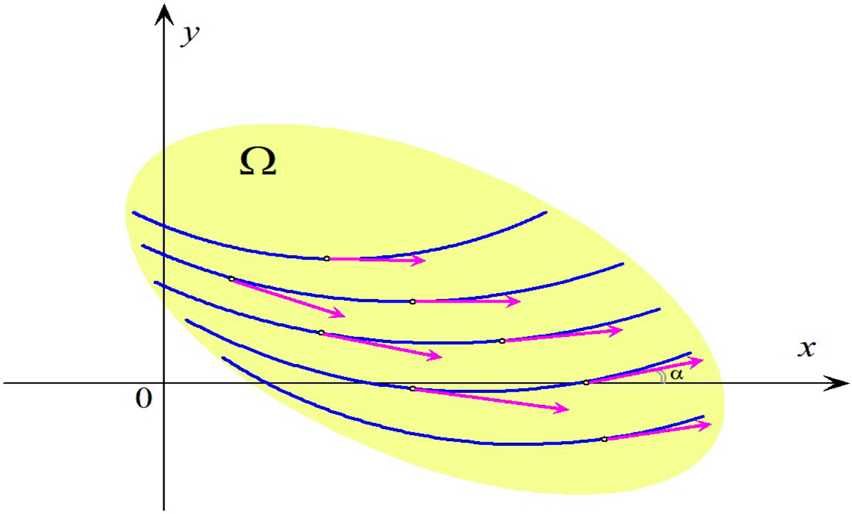

Рис. 1. Поле направлений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

Поскольку в общем случае аналитический вид решения уравнения $y' = f(x,y)$. найти не удается, то можно попытаться построить приближенное геометрическое представление частных решений, воспользовавшись тем, что каждой точке $\| \; x \quad y \; \|^{\mathrm{T}}$ некоторого множества $\Omega \subseteq E^2$ поставить в соответствие вектор с координатным представлением $\| \; 1 \;\; f(x,y) \; \|^{\mathrm{T}}$, что иллюстрирует рис. 1.

Полученное векторное множество принято называть *полем направлений* уравнения (1). Его основные геометрические свойства определяет теорема, называемая *теоремой существования и единственности* решения *задачи Коши* вида

$$\text{найти частное решение уравнения } y' = f(x,y),$$

$$\text{для которого } \; y(x_0) = y_0 \; \text{ с } \; \{x_0, y_0\} \in \Omega \; . \tag{8}$$

Теорема 1. (Коши)

Пусть функции $f(x, y)$ **и** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **непрерывны в области** Ω, **а** $X \subseteq R$ – **проекция** Ω **на ось** Ox, **тогда**

— $\forall x_0 \in X\ \exists \Delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (1.1.4) существует** $\forall x \in \mathrm{U}_\Delta(x_0)$,

и

— **если** $y = y_1(x),\ x \in X_1$, **и** $y = y_2(x),\ x \in X_2$, — **два решения задачи Коши (1.1.4), причем** $x_0 \in X_1 \cap X_2$, **то** $y_1(x) = y_2(x)\ \forall x \in X_1 \cap X_2$.

Из определения производной функции в точке следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)\,.$$

Поскольку $f(x, y)$ – функция, то интегральные кривые пересекаться не могут, а могут лишь касаться друг друга. Если же функция $f(x, y)$ кроме того достаточно гладкая, чтобы удовлетворить условиям теоремы 1, то невозможным оказывается и касание.

Свойство интегральных кривых, заключающееся в том, что они не пересекаются и не касаются, можно использовать для построения приближенного эскиза их графиков, поскольку очевидно, что каждая из точек плоскости Oxy, для которой $f(x, y) = k$, где $k = \text{const}$, имеет касательную к интегральной кривой с одним и тем же угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha$. Линию, каждая точка которой имеет один и тот же угловой коэффициент, называют *изоклиной*.

Графическое представление семейства изоклин на плоскости Oxy позволяет делать заключения о некоторых свойствах интегральных кривых и строить эскизы их графиков, что демонстрирует

Задача 4. Для уравнения $y' = y + x$ построить эскиз интегральных кривых.

Решение: Заметим, что в данной задаче условия теоремы 1.1.1 выполнены, а область Ω есть вся координатная плоскость Oxy. Уравнения изоклин имеют вид $y = -x + k$, следовательно – это семейство параллельных прямых, изображенных голубым цветом на рис. 2.

Вполне очевидны следующие свойства интегральных кривых: во-первых, они возрастают в точках, где $k > 0$, и убывают там, где $k < 0$; во-вторых, $y = -x - 1$ – частное решение исходного уравнения.

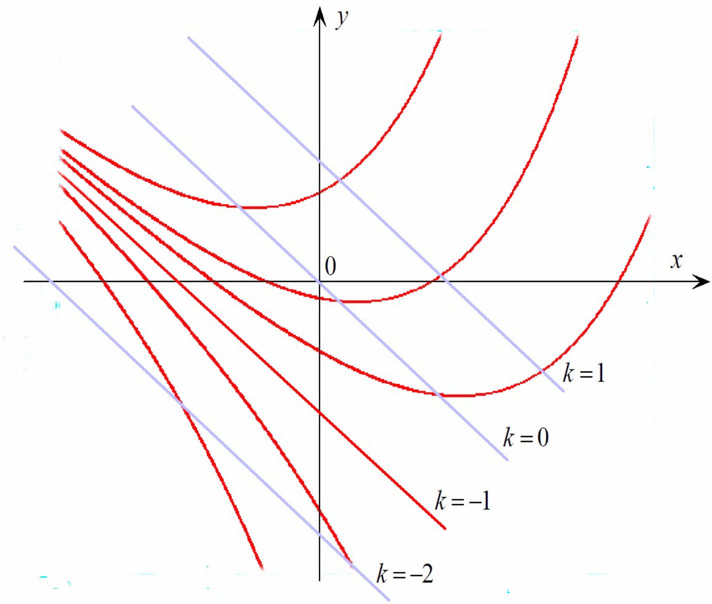

Рис. 2. Эскиз семейства интегральных кривых задачи 4.

Если предположить, что функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то из условия $y' = y+x$ следует

$$y'' = y' + 1 = y + x + 1 \ .$$

То есть интегральные кривые выпуклы вниз в точках, для которых $y + x > -1$ (так как здесь $y'' > 0$), и, соответственно, выпуклы вверх при $y + x < -1$.

При $y+x = 0$ касательные к интегральным кривым горизонтальны, сами же интегральные кривые выпуклы вниз. Следовательно, в этих точках частные решения исходного уравнения имеют минимум.

Принимая во внимание отмеченные свойства интегральных кривых, строим эскизы их графиков, которые показаны на рис. 2 красным цветом.

Решение получено.

Уравнения первого порядка в дифференциалах

Если в уравнении (1) производную $y'(x)$ представить как отношение дифференциалов переменных y и x, то оно может быть записано в виде $dy - f(x,y)dx = 0$, что позволяет рассматривать уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{9}$$

как формальное обобщение линейного уравнения первого порядка (1).

Будем предполагать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны в области $\Omega \subseteq E^2$ и не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке этой области. Последнее условие аналитически может быть сформулировано в виде

$$|P(x,y)| + |Q(x,y)| > 0 \quad \forall \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \in \Omega \, .$$

Определение 1.	Дифференциальное уравнение, записываемое в виде (9), где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, называется *линейным уравнением первого порядка в дифференциалах*.

Более общий вид уравнения (9) (по сравнению с уравнением (1)) обусловлен, во-первых, тем, что при $P(x, y) = -f(x, y)$ и $Q(x, y) = 1$ уравнение (1) следует как частный случай из уравнения (9), и, во-вторых, тем, что переменные x и y в уравнение (9) входят равноправно, то есть нет явного указания на то, является ли y функцией x (или наоборот).

Более того, опираясь на известную теорему из курса математического анализа об инвариантности формы первого дифференциала, можно допустить, что и y, и x одновременно являются функциями некоторой переменной t, а это, в свою очередь, позволяет дать определение решения уравнения (9), обобщающее определение 1.

Определение 2	Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix}$, где $t \in \Theta \subseteq R$, называется *частным решением* уравнения (1.4.1), если $\forall\, t \in \Theta$: – $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} \in \Omega\,;$ – $\lvert x'(t)\rvert + \lvert y'(t)\rvert > 0\,;$ – $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0\ .$

Из этого определения непосредственно следует, что изображающая частное решение интегральная кривая является в области Ω гладкой линией, заданной параметрически как $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} \quad \forall t \in \Theta$. В отличие от случая уравнения (1) эта интегральная кривая необязательно является графиком какой-либо функции $y = y(x)$. Она может иметь участки, которые есть графики функции $x = x(y)$. Кроме того, поле направлений уравнения (9) может содержать векторы, параллельные оси Oy.

Рассмотрим уравнение (9), добавив к указанным в определении (1.4.1) ограничениям условие непрерывности в области Ω частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Определение 3	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (9), называется *уравнением первого порядка в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x,y)$, непрерывно дифференцируемая в области Ω, такая, что $$dU \equiv P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

В сделанных предположениях очевидно, что все решения уравнения (9) удовлетворяют равенству $U(x,y)=C$. Остается только выяснить, при каких условиях на $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ такая функция $U(x,y)$ существует. А если существует, то как ее можно найти?

Необходимым условием существования такой функции является выполнение равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{10}$$

которое, в силу определения 1 и условия непрерывности вторых частных производных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, вытекает из

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Нужно отметить, что в случае, когда область Ω является *односвязной*, условие (10) оказывается *достаточным* для существования функции $U(x,y)$. Соответствующая теорема доказывается в курсе математического анализа.

Конкретный вид функции $U(x,y)$ может быть найден из системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)\ ,\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)\ .\end{array}\right. \tag{11}$$

Задача 5. Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \ .$$

Решение Сначала проверим выполнение условия (10). Коэффициенты при дифференциалах суть непрерывно дифференцируемые функции на всей координатной плоскости, и для них

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

то есть данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Система уравнений (11) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} \ , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y} \ . \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $U(x,y) = xe^{-y} + C(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C'(y) = -2y \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C(y) = -y^2 + K \ .$$

И окончательно из $U(x,y) = xe^{-y} - y^2 + K$ получаем ответ задачи:

Решение получено.

$$xe^{-y} - y^2 = C \ .$$

Интегрирующий множитель

Пусть уравнение (9) таково, что в области Ω :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. В этом случае можно поставить задачу поиска непрерывно дифференцируемой и не равной тождественно нулю в области Ω функции $\mu(x, y)$, такой что

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\,.$$

Пример: для уравнения

$$x^2y^3\,dx + (x^3y^2 + x)\,dy = 0$$

это функция $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy}$, поскольку после умножения на нее, уравнение становится уравнением в полных дифференциалах:

$$xy^2\,dx + x^2y\,dy + \frac{dy}{y} = 0$$

или

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln|y|\right) = 0.$$

Заметим, что при этом теряются решения исходного уравнения: $x = 0$ и $y = 0$.

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются в ноль одновременно в Ω, то такая функция, называемая *интегрирующим множителем*, существует (всегда!) и удовлетворяет следующему из (10) уравнению

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu\ . \tag{12}$$

Уравнение (12) есть уравнение в частных производных первого порядка и его интегрирование, вообще говоря, более сложная задача, чем поиск решений уравнения (9).

Однако поскольку нам требуется лишь какое-нибудь частное решение, то иногда интегрирующий множитель удается найти подбором, опираясь на какие-либо особые свойства или частный вид функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

При этом может оказаться удобным разбить процедуру поиска функции $\mu(x, y)$ на последовательные шаги, каждый из которых состоит в выделении некоторого полного дифференциала или выполнения замены переменных.

Наконец, применяя метод интегрирующего множителя, следует не забывать о том, что уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ и $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$ неравносильны друг другу и в процессе решения может потребоваться дополнительное исследование.

Проиллюстрируем теперь использование этого метода.

Задача 6. Решить уравнение

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg}\frac{y}{x}\, dx \, .$$

Решение С формальной точки зрения решение данной задачи вполне допустимо описать примерно такой фразой: «Заметим, что в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $\mu(x,y) = -\frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$, позволяющую преобразовать уравнение к виду $d\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = -dx^2$». Однако процедура решения окажется более прозрачной и понятной, если ее разбить на несколько последовательных шагов.

Вначале в левой части исходного уравнения выделим полный дифференциал от $\frac{y}{x}$:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = 2x\, \operatorname{tg}\frac{y}{x}\, dx \qquad \text{или} \qquad -\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{x}\, dx^2 \, .$$

Затем выполним разделение переменных $\frac{y}{x}$ и x^2 :

$$\frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}} = -dx^2 \, .$$

Отметим, что на этом этапе мы потеряли решение $y = 0$.

Наконец, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем

$$\frac{\cos\frac{y}{x}\,d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sin\frac{y}{x}} = -dx^2 \qquad \text{или} \qquad \frac{d\sin\frac{y}{x}}{\sin\frac{y}{x}} = -dx^2 \ .$$

Откуда

$$d\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = d\left(-x^2\right) \qquad \text{или} \qquad \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = -x^2 + \ln\tilde{C} \ ,$$

где $\tilde{C} > 0$. Окончательно, с учетом решения $y = 0$, получаем ответ задачи:

`Решение получено.`

$$\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2} \ , \ \ \forall C \ .$$

Задачу поиска интегрирующего множителя иногда можно упростить, сделав некоторые предположения о его виде. Например, можно попытаться найти интегрирующий множитель среди функций, зависящих только от одной из переменных x или y, или же в виде $\mu\big(f(x,y)\big)$, где $f(x,y)$ некоторая конкретная функция и т.п.

Подобные подходы, как показывает вычислительная практика, весьма редко приводят к желаемому результату. Более эффективными оказываются методы построения интегрирующих множителей, основанные на следующих рассуждениях.

Заметим, что если $\mu(x,y)$ есть интегрирующий множитель уравнения (9), то есть

$$\mu P dx + \mu Q dy = du(x,y),$$

то интегрирующим множителем для уравнения (9) будет являться и функция $\mu(x,y)\,F\big(u(x,y)\big)$, где $F(u)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая функция одной переменной. Действительно,

$$\mu F(u)\,(P dx + Q dy) = F(u)\Big(\mu P dx + \mu Q dy\Big) = F(u) du = d\Phi(u)\,,$$

где $\Phi'(u) = F(u)\,.$

Откуда следует, что интегрирующих множителей бесконечно много, и эту неединственность также можно попытаться использовать для построения $\mu(x,y)$. Например, попробуем представить левую часть исходного уравнения

$$(P_1 + P_2)\,dx + (Q_1 + Q_2)\,dy = (P_1 dx + Q_1 dy) + (P_2 dx + Q_2 dy)$$

так, чтобы μ_1 и μ_2 – интегрирующие множители уравнений

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0 \qquad \text{и} \qquad P_2 dx + Q_2 dy = 0 \tag{13}$$

– находились бы сравнительно легко.

При этом будут справедливы равенства

$$\mu_1 P_1\,dx + \mu_1 Q_1\,dy = du_1 \qquad \text{и} \qquad \mu_2 P_2\,dx + \mu_2 Q_2\,dy = du_2 .$$

Подберем теперь функции F_1 и F_2 так, чтобы

$$\mu_1 F_1(u_1) \equiv \mu_2 F_2(u_2) = M\,.$$

Решение исходной задачи в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} &M\,(Pdx + Qdy) = M\,(P_1dx + Q_1dy) + M\,(P_2dx + Q_2dy) = \\ &= \mu_1 F_1(u_1)\,(P_1dx + Q_1dy) + \mu_2 F_2(u_2)\,(P_2dx + Q_2dy) = \\ &= F_1(u_1)\,(\mu_1\,(P_1dx + Q_1dy)) + F_2(u_2)\,(\mu_2\,(P_2dx + Q_2dy)) = \\ &= F_1(u_1)du_1 + F_2(u_2)du_2 = d\,(\Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)) = 0. \end{aligned}$$

Откуда окончательно

$$\Phi_1\,(u_1(x,y)) + \Phi_2\,(u_2(x,y)) = C\,. \tag{14}$$

Практическое применение описанного метода иллюстрирует

Задача 7. Решить уравнение

$$\left(x^3 - xy^2 - y\right) dx + \left(x^2 y - y^3 + x\right) dy = 0 \, .$$

Решение Уравнения (13) сформируем, включив в первое их них слагаемые с первыми степенями независимых переменных и во второе слагаемые третьего порядка, получим

$$-ydx + xdy = 0 \qquad \text{и} \qquad \left(x^3 - xy^2\right) dx + \left(x^2 y - y^3\right) dy = 0 \, .$$

Для первого уравнения имеем

$$-ydx + xdy = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_1(x, y) = \frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad u_1(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Действуя аналогично для второго уравнения, находим

$$\left(x^3 - xy^2\right) dx + \left(x^2 y - y^3\right) dy = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$x^2 \left(xdx + ydy\right) - y^2 \left(xdx + ydy\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\left(x^2-y^2\right) d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_2(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2} \quad \text{и} \quad u_2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}\,.$$

Теперь подберем функции $F_1(u_1)$ и $F_2(u_2)$ так, чтобы выполнялось равенство $\mu_1 F_1(u_1)=\mu_2 F_2(u_2)$, то есть

$$\frac{1}{x^2}\,F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2-y^2}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,.$$

Откуда следует, что можно взять, например:

$$F_1\left(u_1\right)=\frac{1}{1-u_1^2} \quad \text{и} \quad F_2\left(u_2\right)\equiv 1\,.$$

Наконец, использовав соотношение (14), получим

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)+\frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad d\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right|\right)=0\ .$$

В итоге получаем решения в виде

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right|=C\ .$$

Завершая процедуру решения задачи, обратим внимание на то, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ исходного уравнения определены на всей плоскости E^2, а использованные интегрирующие множители нет. Поэтому следует проверить, не являются ли решениями $x=0$ и $y=\pm x$. Непосредственная проверка показывает, что $y=\pm x$ суть также решения.

Решение получено.