Теорема Коши для уравнений 1-го порядка

На практике достаточно часто требуется находить не общее решение уравнения

$$y' = f(x, y)\,, \tag{1}$$

а лишь некоторое его частное решение, удовлетворяющее конкретным условиям.

Если уравнение не интегрируется в квадратурах, то для решения подобных задач можно применять специальные методы, не требующие нахождения общего решения.

Например, методы *численной аппроксимации* частных решений можно использовать для решения задачи Коши, если в ней применима теорема Коши. Поскольку тогда мы точно знаем, что та функция, которую мы ищем, существует и единственна.

Возможны также случаи, когда решение задачи Коши *существует, но не единственно*, что иногда позволяет решать задачи более сложные, чем задача Коши.

Данный факт иллюстрирует

Задача 1. Для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ решить:

а) задачу Коши с условием $y(1) = 1$,

б) задачу Коши с условием $y(0) = 0$,

с) краевую задачу с условиями

$$y(-3) = -1 \quad \text{и} \quad y(1) = 1 \ .$$

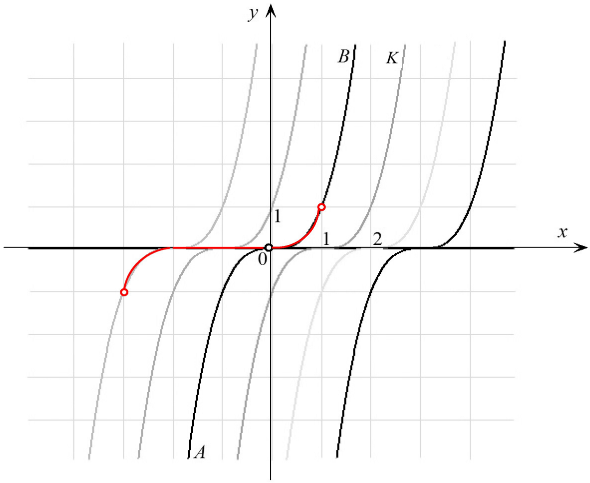

Рис. 1. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.

Решение. Найдем вначале общее решение данного уравнения. Легко видеть, что $y(x) \equiv 0$ есть его частное решение.

Если же $y(x) \neq 0$, то, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx\,,$$

что дает $\sqrt[3]{y} = x + C$ или $y = (x + C)^3$.

Поэтому решение задачи Коши (1.2.3а) есть функция

$$y = x^3\,,$$

единственная при $x \in (1 - \Delta_1, 1 + \Delta_2)\,.$

Здесь $0 \leq \Delta_1 < 1$ и $0 \leq \Delta_2 < +\infty$, поскольку при $\Delta_1 \geq 1$ единственность нарушается и, следовательно, интервал $(0, +\infty)$ является максимально широким множеством *однозначной продолжимости* решения задачи Коши (1.2.3а).

Решение задачи Коши (1.2.3b) не единственное. Множество графиков решений задачи Коши в этом случае состоит из гладких интегральных кривых, составленных из «подходящих кусков» конкретных частных решений уравнения (1.2.3), при условии, что хотя бы один из этих кусков проходит через точку $(0;0)$.

Наконец, проверьте самостоятельно, что решением краевой задачи (1.2.3c) будет непрерывно дифференцируемое частное решение вида

$$y(x) = \begin{cases} (x+2)^3 & \text{при } x \in (-\infty, -2)\ , \\ 0 & \text{при } x \in [-2, 0\,]\ , \\ x^3 & \text{при } x \in (0, +\infty)\ , \end{cases}$$

Решение получено.

график которого на рис. 1 показан красным цветом.

Таким образом, общее решение уравнения в задаче 1 есть совокупность:

— частного решения $y(x) = 0$,

— семейства функций $y = (x + C)^3$, $\forall C \in R$ и

— всевозможных непрерывно дифференцируемых *функций*, составленных из подходящих фрагментов функций $y(x) = 0$ и $y = (x + C)^3$.

Например, интегральной кривой будет линия, проходящая через точки $A - (0; 0) - - (1; 0) - K$, а линия $B - (0; 0) - - (2; 0) - K$ интегральной кривой не является, поскольку она не есть график функции (нет однозначности в зависимости y от x).

Наконец отметим, что в задаче 1 множество Ω — это вся координатная плоскость, в любой точке которой функция $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$ непрерывна, в то время как, частная производная $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ будет непрерывной лишь при $\forall y \neq 0$.

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим теперь методы решения уравнений 1-го порядка, не разрешенных относительно производной. Эти уравнения как было отмечено ранее записываются в виде

$$F\left(x,y,y'\right)=0\ , \tag{2}$$

где $F(x_1,x_2,x_3)$ – известная функция от трех переменных, непрерывная в непустой области $\Omega\subseteq E^3$, а $y(x)$ – искомая функция от $x\in X\subseteq\mathbb{R}$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде параметрически заданной функци $\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{array}\right.\quad t\in\Theta\,.$

Условимся при этом обозначать «штрихом» дифференцирование по переменной x, а «верхней точкой» — дифференцирование по t.

Дадим

Определение 1.	Вектор-функция $$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right. \qquad t\in\Theta \tag{3}$$ называется *частным решением в параметрической форме* дифференциального уравнения (2), если $\forall t\in\Theta$: – $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы ; – $\varphi(t)\in X$, $\dot\varphi(t)\neq 0$ $$\text{и}\quad \left\Vert \begin{matrix} \varphi(t) & \psi(t) & \dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \end{matrix}\right\Vert^{\mathrm{T}} \in\Omega\ ;$$ – $F\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)\ =\ 0\ .$

Отметим, что здесь (по сравнению с определением решения уравнения в дифференциальной форме) неравенство $|\dot{\varphi}(t)| + |\dot{\psi}(t)| > 0$ заменено более жестким условием $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, гарантирующем существование функции $y(x)\ \forall x \in X$. При этом интегральной кривой является график частного решения $y(x)$, заданного параметрически вектор-функцией вида (3).

Для решения уравнения (2) в общем случае можно применить *метод введения параметра*, состоящего в замене $y' = p$ с последующим решением дифференциально-алгебраической системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p\,dx. \end{array} \right. \tag{4}$$

Имеет место

Теорема 1. **Система уравнений (4) и уравнение (2) равносильны.**

Использование системы (4) может оказаться полезным, если ее первое уравнение легко разрешимо относительно y или x.

Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

В предыдущем параграфе были обсуждены методы нахождения общего решения уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, то есть уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0 \; .$$

Как и раньше, мы будем предполагать, что скалярные функции $F(x, y, d)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial d}$ вещественны и непрерывны в некоторой непустой области $G \subseteq E^3$.

Тот факт, что для уравнений вида (2) упорядоченная пара чисел $\{x_0;\ y_0\}$ может вовсе не определять или же определять неоднозначно (даже локально!) частное решение таких уравнений, приводит к необходимости изменения постановки задачи Коши для уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной.

Определение 2	Задача Коши для уравнения $F(x,y,y')=0$ формулируется так: найти $y(x)$ при условиях: $$\left\{\begin{array}{l} y(x_0)=y_0\ , \\ y'(x_0)=p_0\ , \\ F(x_0,y_0,p_0)=0\ . \end{array}\right. \qquad (7)$$ При этом тройка чисел $\|\ x_0\ \ y_0\ \ p_0\ \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq E^3$ называется *начальными условиями задачи Коши.*

Иначе говоря, задачей Коши для уравнения (2) называется задача поиска $y^*(x)$ – частного решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям (7).

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (2) – (7) дает

Теорема 2

Пусть функции $F(x,\,y,\,d)$ **и** $\dfrac{\partial F}{\partial d}$ **непрерывны в области** G **и пусть** $\left.\dfrac{\partial F}{\partial d}\right|_{(x_0,\,y_0,\,d_0)} \neq 0$, **тогда найдется** $\delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (2) – (7) существует и единственно на интервале** $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 2 не выполняются.

Определение 3	Точка $\| x_0\, y_0 \|^{\mathrm{T}}$ называется *особой*, если существует ее окрестность такая, что через эту точку в данной окрестности проходит больше, чем одна интегральная кривая, являющаяся решением задачи Коши (2)—(7). Решение задачи Коши (2) – (7), все точки которого особые, называется *особым решением.*

Геометрически данное определение может быть интерпретировано так: в каждой точке интегральной кривой особого решения ее касается интегральная кривая другого решения уравнения (2), то есть решения, несовпадающего с особым в некоторой окрестности точки касания.

Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 2, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,d)=0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial d}(x,y,d)=0\,. \end{array}\right. \tag{8}$$

Если из этой системы исключить d, то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x,y)=0$.

Определение 4	Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x,y)=0$, называется *дискриминантной кривой* уравнения (2).

Из сказанного следует, что интегральная кривая особого решения обязана быть дискриминантной кривой. Обратное, вообще говоря, неверно.

Это означает, что искать особые решения следует именно среди дискриминантных кривых.

В общем случае для выделения особого решения уравнения (2) следует:

1° найти общее решение уравнения (2);

2° найти дискриминантные кривые уравнения (2), которые являются частными решениями этого уравнения;

3° проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (2).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п. 3° следующая.

Пусть $y(x,C)\ \forall x \in [a,b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (2), а $y^*(x)$ – частное решение этого уравнение, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^*(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a,b]$ у *переопределенной* системы

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(x,C) & = & y^*(x)\ , \\ \dfrac{\partial y(x,C)}{\partial x} & = & \dfrac{d\,y^*(x)}{d\,x} \end{array} \right. \tag{9}$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.

Проиллюстрируем применение описанной схемы для конкретной задачи.

Задача 2. Решить уравнение

$$2xy' - y = y' \ln yy' \ .$$

Решение. Исходное уравнение можно привести к виду

$$xu' - u = \frac{u'}{2} \ln \frac{u'}{2}$$

умножением обеих его частей на y с последующей заменой $u = y^2$. А поскольку $y = 0$ не является решением, то новое уравнение равносильно исходному.

Полученное уравнение есть так называемое *уравнение Клеро*, метод решения которого можно найти в справочниках.

Однако мы воспользуемся не информационным ресурсом, а изложенной выше схемой.

Применим метод введения параметра. Разрешая это уравнение относительно u и полагая $u' = p$, получаем систему (4) в виде

$$\begin{cases} u = xp - \dfrac{p}{2} \ln \dfrac{p}{2}\,, \\ du = p\,dx\;. \end{cases} \qquad (10)$$

Дифференцируя первое уравнение по x и подставляя в него $u' = p$, получаем

$$p' \left(x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0\;.$$

Теперь либо

$$p' = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = C \;\; \forall\, C > 0, \qquad \text{и из (1.5.6)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}\,,$$

либо

$$x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = 2e^{2x-1}\;,$$

Решение получено.

что, в свою очередь, при подстановке в *первое* уравнение системы (10) дает $y^2 = e^{2x-1}$.

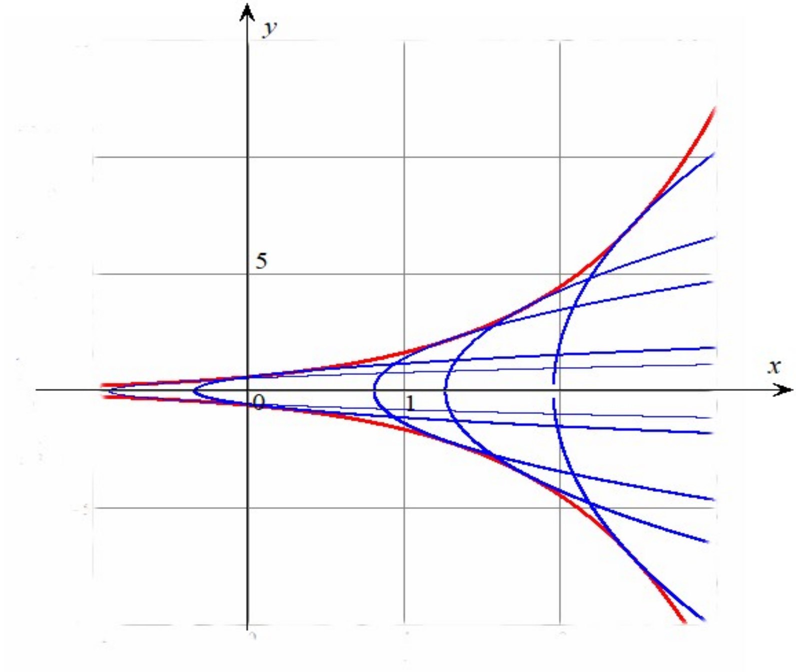

Рис. 2. Интегральные кривые для уравнения в задаче 2.

Интегральные кривые частных решений уравнения в задаче 2 показаны на рис. 2. По поводу их вида можно сделать следующие замечания.

Во-первых, кроме решений, определяемых полученными формулами, как уже указывалось ранее, здесь имеются и «составные» решения, образуемые объединением подходящих фрагментов «формульных» решений.

Во-вторых, среди интегральных кривых могут иметься как пересекающиеся, так и касающиеся друг друга.

Также может оказаться, что через одну точку не проходит ни одна интегральная кривая, а может оказаться – что больше, чем одна.

Наконец, исследуем данное уравнение на наличие особых решений.

Найдем дискриминантное множество этого уравнения, Оно будет определяться алгебраической системой уравнений (8)

$$\begin{cases} 2xd - y - d\ln yd = 0\,, \\ 2x - \ln yd - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Исключив d из этих равенств, получим $y^2 = e^{2x-1}$. Это значит, что обе ветви дискриминантной линии есть решения данного уравнения.

Убедимся теперь, что эти решения особые. Рассмотрим, например, ветвь $y^*(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$.

Покажем, что для любого фиксированного x найдется $C > 0$ такое, что для функций

$$y^*(x) = e^{x-\frac{1}{2}} \qquad \text{и} \qquad y(x,C) = \sqrt{Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}}$$

их значения, также как и значения их производных, равны друг другу в точке x. Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} e^{2x-1} = Cx - \dfrac{C}{2}\ln\dfrac{C}{2}\,, \\ 2x - 1 = \ln\dfrac{C}{2}\,. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при $C = 2e^{2x-1}$ эти равенства превращаются в тождества по x. Следовательно, решение $y^*(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$ особое.

Случай $y^*(x) = -e^{x-\frac{1}{2}}$ рассматривается аналогично.

О методах понижения порядка уравнения и других специальных алгоритмах

Задачи исследования существования и единственности решений возникают и в случае нелинейных уравнений порядка более высокого, чем первый.

Поэтому представляется полезным рассмотрение специальных методов *понижения порядка*, позволяющих упрощать подобные уравнения и использовать методы рассмотренные нами ранее. Рассмотрим некоторые из них.

Порядок уравнения вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ может быть понижен, если

1°. Левая часть исходного уравнения не содержит неизвестной функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно $1 \leq k \leq n$. То есть уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ .$$

В этом случае за новую неизвестную функцию принимаем $u(x) = y^{(k)}(x)$, тогда

$$y^{(k+1)}(x) = u'(x), \ \ldots \ , y^{(n)}(x) = u^{(n-k)}(x).$$

Порядок уравнения понизился до $n-k$.

2°. Формулировка уравнения не содержит независимой переменной. Это значит, что мы имеем уравнение вида

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\ .$$

Приняв за новую независимую переменную y, а за новую искомую функцию $y'(x) = u(y)$, и учитывая, что

$$y'(x) = u, \qquad y''_{xx}(x) = u'_x(x) = u'_y \cdot y'(x) = u'_y u, \qquad \ldots\ ,$$

понижаем порядок уравнения на единицу.

3°. Исходное уравнение является однородным относительно искомой функции и ее производных, то есть не меняется, если каждую из них умножить на $k > 0$. Порядок уравнения понизится на единицу при замене

$$y' = yu, \qquad y'' = y'u + yu' = yu^2 + yu', \qquad \ldots .$$

4°. Исходное уравнение таково (или же приводится к такому виду), что его левая часть является полной производной некоторого порядка. Этот метод поясним следующим примером.

Задача 3. Понизить порядок уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Умножив обе части этого уравнения на y', получим

$$y'y'' + yy' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\,y'^2\right)' + \left(\frac{1}{2}\,y^2\right)' = 0$$

или $\left(y'^2 + y^2\right)' = 0$.

Откуда приходим к уравнению первого порядка

$$y'^2 + y^2 = C^2 \ ,$$

где C есть произвольная константа. Легко видеть, что у него имеются решения $y(x) = C \neq 0$, являющиеся *посторонними* для исходного уравнения.

Отметим, что для решения этой задачи можно использовать и метод 2°. Действительно, сделав замену $y' = u$, при которой $y'' = u'_y u$, мы получим

$$u'_y u + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u\,du + y\,dy = 0.$$

Откуда следует, что

Решение получено.

$$d\left(\frac{u^2 + y^2}{2}\right) = 0 \quad \text{или окончательно} \quad y'^2 + y^2 = C^2\ .$$

Иногда общее решение дифференциального уравнения удается найти, если известно какое-нибудь частное решение.

К таким случаям относятся методы, основанные на использовании формулы Лиувилля–Остроградского, которые будут рассмотрены нами позднее.

Другим примером этого подхода служит *уравнение Риккати*:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \tag{11}$$

где $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ заданные функции, непрерывные на некотором интервале $(\alpha,\ \beta)$.

Действительно, в случае, когда известно, что уравнение (11) имеет частное решение $y_0(x)$, его общее решение определяется формулой

$$y(x) = u(x) + y_0(x),$$

где $u(x)$ есть общее решение уравнения Бернулли:

$$u' = \Big(2A(x)y_0(x) + B(x)\Big)u + A(x)u^2 \,.$$

В справедливости данного утверждения убедитесь самостоятельно.

Наконец, следует иметь в виду, что описанные выше случаи суть условия, при которых оказывается возможным понижение порядка, лишь достаточные, но не необходимые.

Это иллюстрирует уравнение

$$y(y'' + y') - (y')^2(xy^2 - 1) = 0\,.$$

Здесь нет однородности и явно присутствует x в записи условия. Тем не менее замена $u(x) = y(x)y'(x)$ преобразует это уравнение в уравнение первого порядка (конкретно, в уравнение Бернулли) вида

$$u' + u = xu^2\,.$$

Использование метода понижения порядка в более сложном случае продемонстрируем на примере решения задачи Коши.

Задача 4. Решить задачу Коши

$$2yy''=(y')^2(3-4y(y')^2)\,, \qquad \text{при условиях } y(4)=1, \quad y'(4)=-1\,.$$

Решение: Используем метод понижения порядка, поскольку уравнение в своей записи не содержит независимой переменной x.

1) Введем новую неизвестную функцию $u(y)=y'(x)$, считая y новой независимой переменной.

В этом случае $y''(x)=(y'(x))'_x=\dfrac{u'_y\,(y)}{x'_y}=uu'_y$. Наше уравнение принимает вид $2yuu'=u^2(3-4yu^2)$.

В силу начального условия $y'(4)=-1$ имеем для искомой функции $u\neq 0$.

Поэтому $2yu'=u(3-4yu^2)$ или $u'=\dfrac{3}{2y}u-2u^3$. Это уравнение Бернулли.

2) Если обе части уравнения Бернулли разделить на u^3, то

$$\frac{u'}{u^3} = \frac{3}{2y}\frac{1}{u^2} - 2 .$$

Здесь делаем новую замену $z(y) = \frac{1}{u^2}$ с $z' = -2\frac{u'}{u^3}$. Получаем $-\frac{z'}{2} - \frac{3}{2y}z = -2$ или линейное неоднородное уравнение вида $z' + \frac{3}{y}z = 4$.

3) Решаем однородное $z' + \frac{3}{y}z = 0$ методом разделения переменных. Получаем $\ln|z| + 3\ln|y| = \ln K,\ K > 0$ или $z(y) = \frac{C}{y^3},\ C \neq 0$. Это − общее решение однородного уравнения.

4) Методом вариации постоянных ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $z^*(y) = C(y)y^{-3}$.

Подставляя эту формулу в неоднородное уравнение, получаем

$$C'(y) = 4y^3 \quad \Rightarrow \quad C(y) = y^4 .$$

Значит, $z(y) = \dfrac{C}{y^3} + y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{C}{y^3} + y$.

5) Из условия задачи; $u(1) = -1$. Поэтому

$$1 = \frac{C}{1} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad z = y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u^2} = y \quad \Rightarrow \quad u(y) = \pm\frac{1}{\sqrt{y}} .$$

Поскольку $u(1) = y'(4) = -1 < 0$, то $u(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} = -\sqrt{y}$. Откуда

$$x = -\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + D . \quad \text{А из } y(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = -\frac{2}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{14}{3} .$$

Наконец, $x = -\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \dfrac{14}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \left(7 - \dfrac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$.