Справочные сведения из теории комплексных чисел

Рассмотрим вначале некоторые свойства комплексных функций вещественного аргумента.

В предположении, что вещественные числа $\alpha = \mathrm{Re}\lambda$ и $\beta = \mathrm{Im}\lambda$ являются соответственно *вещественной* и *мнимой частью* комплексного числа $\lambda = \alpha + i\beta$, дадим определение функции $e^{\lambda x}$, где x — вещественное.

Напомним, что в курсе математического анализа степенные ряды используются для определения показательной и тригонометрических функций комплексного аргумента.

В частности рядами, сходящимися во всей комплексной плоскости, задаются функции

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} ,$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} ,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} .$$

Для всех этих рядов $R_{cx} = +\infty$, То есть, они сходятся абсолютно и равномерно $\forall z$ таких, что $|z| \leq R < +\infty$.

Опишем некоторые свойства этих рядов.

1. Используя теорему о перемножении абсолютно сходящихся рядов, можно доказать, что

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\qquad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\,.$$

2. Запишем коэффициенты рядов для функций e^{iz}, $\cos z$ и $\sin z$, (учитывая, что по правилу умножения комплексных чисел $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1,\ \ldots$) в виде таблицы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
e^{iz}	1	i	$-\frac{1}{2!}$	$-\frac{i}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\frac{i}{5!}$	$-\frac{1}{6!}$	$-\frac{i}{7!}$	$\frac{1}{8!}$	$\cdots$
$\cos z$	1		$-\frac{1}{2!}$		$\frac{1}{4!}$		$-\frac{1}{6!}$		$\frac{1}{8!}$	$\cdots$
$\sin z$		1		$-\frac{1}{3!}$		$\frac{1}{5!}$		$-\frac{1}{7!}$		$\cdots$

Нетрудно заметить, что если третью строку умножить на i и сложить со второй, то получится первая строка. Таким образом мы приходим к *формуле Эйлера*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z\,. \tag{1}$$

3. Из (1) следует, что $\cos z$ четная функция, а $\sin z$ — нечетная, поэтому
$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z\,.$$
Почленное сложение этого равенства и (1) дает
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch} iz\,,$$
а почленное вычитание —
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\operatorname{sh} iz\,,$$
что отчасти оправдывает использование терминов «гиперболический синус» и «гиперболический косинус».

Нетрудно убедиться, что функция e^z *периодическая* с периодом равным $2\pi i$.

4. Формула Эйлера (1) позволяет *любое* комплексное число $z = a+ib$ записать как в *тригонометрической* форме

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

так и в *показательной*

$$z = \rho\, e^{i\varphi}\,,$$

где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, а φ на промежутке $[0,\,2\pi)$ однозначно определяется системой

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases}$$

Удобство использования показательной формы записи комплексного числа демонстрируют

Задача 1. *Записать в стандартной форме значение комплексного числа* $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. 1) Напомним, что стандартная форма комплексного числа имеет вид $z = a + i\,b$.

Чтобы получить его для числа $\sqrt[3]{-1}$, используем последовательно стандартную, тригонометрическую (с учетом периодичности) и показательную формы комплексного числа (-1):

$$(-1) = -1 + i \cdot 0 =$$

$$= \cos(\pi + 2\pi n) + i\,\sin(\pi + 2\pi n) = e^{i(\pi + 2\pi n)},$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

2) В данной задаче необходимость учета периодичности тригонометрических функций обусловлена тем, что символ $\sqrt[3]{-1}$ может обозначать не *одно*, а несколько комплексных чисел. Действительно,

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i(\pi+2\pi n)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n\right) =$$

$$= \begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} & + & i\sin\frac{\pi}{3} & = & \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{при} & n=0\,, \\ \cos\pi & + & i\sin\pi & = & -1+i\,0 & \text{при} & n=1\,, \\ \cos\frac{5\pi}{3} & + & i\sin\frac{5\pi}{3} & = & \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{при} & n=2\,. \end{cases}$$

Решение получено.

При других n значения числа $\sqrt[3]{-1}$ повторяются.

Задача 2. *Найти значение комплексного числа* i^i.

Решение. Число i, стоящее в основании степени, запишем в показательной форме как $e^{i\frac{\pi}{2}}$. Тогда, с учетом $i^2 = -1$, получим

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}\,.$$

Решение получено. Это число — вещественное.

Задача 3. *Найти какое-нибудь вещественное решение уравнения*

$$\cos\sqrt{x} = 5\,.$$

Решение. 1) По формуле Эйлера имеем

$$\cos\sqrt{x} = \frac{e^{i\sqrt{x}} + e^{-i\sqrt{x}}}{2}\,.$$

Введем новое неизвестное $u = e^{i\sqrt{x}}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$u + \frac{1}{u} = 10 \qquad \text{или} \qquad u^2 - 10u + 1 = 0\,.$$

Его решение $u = 5 \pm \sqrt{24}\,$.

2) Теперь, например, из условия $e^{i\sqrt{x}} = 5 + \sqrt{24}$ находим значение x .

$$i\sqrt{x} = \ln(5+\sqrt{24}) \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\ln^2(5+\sqrt{24})\,.$$

В качестве дополнительного упражнения, самостоятельно постройте график функции $y = \cos\sqrt{x}$ на всей вещественной оси.

Решение получено.

Поскольку для чисто мнимого аргумента формула Эйлера имеет вид $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$, то выражение комплексной экспоненты через α и β можно записать как

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\ .$$

Тогда непосредственная проверка показывает, что будут выполняться соотношения $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}$ и $e^{\lambda x}\cdot e^{-\lambda x} = 1$. Например,

$$e^{\lambda x}\cdot e^{-\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\cdot e^{-\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)) =$$

$$= e^{\alpha x}e^{-\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\cdot(\cos\beta x - i\sin\beta x) = \cos^2\beta x - (i^2)\sin^2\beta x =$$

$$= \cos^2\beta x + \sin^2\beta x = 1\ .$$

Пусть функция $f(x)$, определенная $\forall x \in X$, имеет комплексные значения, тогда $f(x)$ представима как $u(x)+iv(x)$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют вещественные значения.

Теперь дадим

Определение 1.	Функция $f(x)$ называется – *непрерывной*, если непрерывны (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$; – *дифференцируемой*, если дифференцируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$; – *интегрируемой*, если интегрируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$.

Согласно определению 1. будут верны равенства

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x) \qquad \text{и}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx\ ,$$

то есть дифференцирование и интегрирование выполняются для комплекснозначной функции по обычным правилам, если считать i константой.

Например, для комплексной экспоненты

$$\frac{d}{dx}\,e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{x_0}^{x} e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - e^{\lambda x_0}\right) \quad \lambda \neq 0\ .$$

Линейные уравнения $n-$го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1.	Уравнение вида $$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\dots$$ $$\dots+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=b(x)\,, \qquad (2)$$ где известные функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ непрерывны $\forall x\in X$, а искомая функция $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall x\in X$, называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка.*

Данное название оправдывается тем, что неизвестная функция $y(x)$, так же как и ее производные, входит в уравнение (2) линейно, в то время как функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ могут быть и нелинейными. Как и раньше, в случае $b(x)\equiv 0\ x\in X$ это уравнение будем называть *однородным*, иначе – *неоднородным*.

Основные свойства решений уравнения (2) описывают:

Теорема 1. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (2), то $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\ C_1,\ C_2$.**

Следствие 1. **Множество всех частных решений однородного уравнения (2) является линейным пространством.**

Теорема 2. **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного, а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (2), то $y_0(x)+y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (2).**

Теорема 3. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (2), то $y_1(x)-y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2).**

Следствие 2. **Общее решение неоднородного уравнения (2) есть сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения (2).**

Продемонстрируем использование приведенных утверждений на примере решения неоднородного линейного уравнения первого порядка специального вида

$$y' - \lambda y = \sum_{k=1}^{t} P_k(x) e^{\mu_k x} \ , \tag{3}$$

где $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ – некоторые комплексные константы, а

$$P_k(x) = b_{0k} + b_{1k}x + \ldots + b_{m_k k}x^{m_k}, \quad b_{m_k k} \neq 0,$$

суть алгебраические многочлены степеней m_k, $k = [1, t]$ с комплексными коэффициентами.

Функции, имеющие вид слагаемых суммы, стоящей в правой части уравнения (3), принято называть *квазимногочленами*.

Общее решение однородного уравнения (3) дается формулой $y_0(x) = Ce^{\lambda x}\ \forall C$. А в силу линейности этого уравнения по y и y' частное решение неоднородного есть сумма частных решений уравнений вида

$$y' - \lambda y = P_k(x)e^{\mu_k x} \quad \forall k = [1, t]\,. \tag{4}$$

Теорема 3

При $\lambda \neq \mu_k$ (*нерезонансный случай*) частным решением уравнения (4) будет являться функция $y^*(x) = Q_k(x)e^{\mu_k x}$, а при $\lambda = \mu_k$ (*резонансный случай*) – функция $y^*(x) = xQ_k(x)e^{\mu_k x}$, где $Q_k(x)$ – алгебраический многочлен степени k.

Дифференциальные многочлены

Приступим теперь к вопросу о способе решения линейных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка (2) в случае, когда оно однородное и имеет постоянные коэффициенты:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad a_0 \neq 0\ . \qquad (5)$$

Определение 2.	Будем говорить, что задан *оператор дифференцирования* $\widehat{D} = \dfrac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых $\forall x \in X$ функций, со значениями в линейном пространстве функций непрерывных $\forall x \in X$, если каждой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ ставится в соответствие единственная непрерывная функция $y'(x)$, что символически обозначается в виде равенств: $y'(x) = \widehat{D}y(x)$ или $y' = \widehat{D}y$. Тогда очевидные равенства $$\frac{d^k}{dx^k} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\right)\right)\right)}_{k} = \underbrace{\widehat{D}\widehat{D}\cdots\widehat{D}}_{k} = \widehat{D}^k$$ позволяют определить *степень дифференциального оператора с натуральным показателем* k. Наконец, используя $\widehat{E}$ — тождественный (единичный) оператор и равенство $\widehat{D}^0 = \widehat{E}$, получаем естественное определение *нулевой степени дифференциального оператора.*

В силу данного определения и равенств $a_n y = a_n \widehat{E} y = a_n \widehat{D}^0 y$, уравнение (5) записывается в виде

$$a_0 \widehat{D}^n y + a_1 \widehat{D}^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} \widehat{D}^1 y + a_n \widehat{D}^0 y = 0 \quad \text{или} \quad L(\widehat{D})\, y = 0 \ ,$$

где $L(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ – алгебраический многочлен n-й степени от x, называемый для уравнения (5) *характеристическим.*

При этом $y(x)$ – решение уравнения $L(\widehat{D})\, y = 0$ – можно трактовать как прообраз отображения n раз непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ в функцию, тождественно равную нулю $\forall x \in X$.

Введем для множества *дифференциальных многочленов* вида $L(\widehat{D})$ операции *сложения* и *умножения.*

Определение 3.	*Суммой дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D})+M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D})+M(\widehat{D})\Big)\,y = L(\widehat{D})y + M(\widehat{D})y \quad \forall y \in \mathcal{C}\,,$$ где $\mathcal{C}$ – линейное пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций. *Произведением дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D})\cdot M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D})\cdot M(\widehat{D})\Big)\,y = L(\widehat{D})\,\Big(M(\widehat{D})y\Big) \quad \forall y \in \mathcal{C}\,.$$

Операции сложения и умножения дифференциальных многочленов обладают свойствами *коммутативности, ассоциативности* и *дистрибутивности.*

Это позволяет оперировать с ними как с обычными алгебраическими многочленами, в частности разлагать на линейные множители.

Теперь продемонстрируем, как использование дифференциальных многочленов позволяет свести решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка к последовательному решению двух уравнений 1-го порядка (т.е. использованию теоремы 3).

Задача 4. Решить уравнение $y'' + 2y' + \alpha y = 0$ при $\alpha = -3$ и при $\alpha = 1$.

Решение. 1°. Пусть $\alpha = -3$. Уравнение $y''+2y'-3y = 0$ с помощью дифференциальных многочленов записывается в виде

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} - 3)y = 0 \quad \text{или} \quad (\widehat{D} - 1)(\widehat{D} + 3)y = 0\,.$$

Обозначим

$$(\widehat{D} + 3)y = u(x) \tag{6}$$

и решим вначале однородное уравнение $(\widehat{D} - 1)u = 0$, т. е. $u' - u = 0$. Получим $u(x) = \tilde{C}_1 e^x \quad \forall \tilde{C}_1$.

Уравнение (6) принимает вид

$$(\widehat{D}+3)y = \tilde{C}_1 e^x \quad \text{или} \quad y' + 3y = \tilde{C}_1 e^x \,. \qquad (7)$$

Это *нерезонансный* случай, т.к. $-3 = \lambda \neq \mu = 1$, и согласно теореме 3 частное решение неоднородного уравнения (7) следует искать в виде $y^*(x) = d_0\, e^x$.
Подстановка последней формулы в (7) дает

$$d_0 = \frac{\tilde{C}_1}{4} = C_1 \quad \forall C_1 \,.$$

Поскольку общее решение однородного уравнения (7) есть $y_0(x) = C_2 e^{-3x} \quad \forall C_2$, то общее решение (7) (а значит и исходного уравнения) представимо в виде

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1, C_2 \,.$$

2°. Пусть теперь $\alpha = 1$. Уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ при помощи дифференциальных многочленов можно записать так:

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} + 1)y = 0\,, \quad \text{или} \quad (\widehat{D} + 1)^2 y = 0\,,$$

$$\text{или же как} \quad (\widehat{D} + 1)(\widehat{D} + 1)y = 0\,.$$

Обозначив

$$(\widehat{D} + 1)y = u(x)\;, \tag{8}$$

решим однородное уравнение $(\widehat{D} + 1)u = 0$ или, что то же самое, уравнение $u' + u = 0$. Его общим решением будет множество функций вида $u(x) = C_1 e^{-x} \quad \forall C_1$.

Теперь решаем уравнение (8):

$$(\widehat{D}+1)y = C_1 e^{-x} \quad \text{или} \quad y' + y = C_1 e^{-x}\,. \qquad (9)$$

Это *резонансный* случай, поскольку $-1 = \lambda = \mu = -1$, и по теореме 3 частное решение неоднородного уравнения (9) следует искать в виде $y^*(x) = x\,d_0\,e^{-x}$.

Подстановка последней формулы в уравнение (9) дает $d_0 = C_1 \quad \forall C_1$, и, следовательно, $y^*(x) = C_1\,x\,e^{-x}$.

Поскольку общее решение однородного уравнения (9) является множеством квазимногочленов нулевого порядка $y_0(x) = C_2 e^{-x} \quad \forall C_2$, то общее решение (9) (а значит и исходного уравнения) имеет вид

Решение получено.

$$y(x) = y^*(x) + y_0(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} \quad \forall C_1, C_2\,.$$

Рассуждая по индукции мы приходим к заключению, что частными решениями линейного уравнения n-го порядка могут быть только *квазимногочлены*.

Выясним теперь, какие именно квазимногочлены будут решениями уравнения
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\ . \qquad (A)$$
Для этого подставим в него функцию $e^{\lambda x}$, где λ — некоторое комплексное число. Получим
$$\Big(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\Big) e^{\lambda x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$
Это означает, что функция $e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (A), если λ является корнем алгебраического уравнения
$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \qquad (B)$$
Наконец, можно показать, что все функции вида
$$x^m e^{\lambda x} \qquad \forall m = [0, k-1]$$
будут решениями линейного уравнения с постоянными коэффициентами в случае, когда когда λ является корнем кратности k уравнения (B) .

Общее решение однородного уравнения

Приведем теперь формулу общего решения приведенного линейного однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \; . \qquad (10)$$

Пусть *попарно не равные друг другу* корни его *характеристического* уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (11)$$

суть числа $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_s$, имеющие кратности соответственно равные $k_1, \; k_2, \; \ldots, \; k_s$.

Имеет место

Теорема 4 **Общее решение уравнения (10) имеет вид**

$$y(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + P_2(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x) e^{\lambda_s x} \; , \qquad (12)$$

где $P_j(x) \; \forall j = [1, s]$ **суть алгебраические многочлены вида** $\sum\limits_{m=1}^{k_j} C_{jm} x^{m-1}$, **а** C_{jm} **– произвольные комплексные константы.**

Следствие 3. **Если все корни характеристического уравнения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ простые (то есть кратности единица), то общее решение уравнения (10) имеет вид**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\ ,$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – произвольные комплексные константы.

Следствие 4. **Линейное пространство, образованное частными решениями уравнения (10), конечномерное. Базисом в этом пространстве может служить, например, любой упорядоченный набор, составленный из следующих n функций:**

Таблица 1.

$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$e^{\lambda_s x}$
$xe^{\lambda_1 x}$	$xe^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$xe^{\lambda_s x}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$\ldots$	$\ldots$	$x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$
	$x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$		

Заметьте, что число заполненных клеток табл. 1, вообще говоря, различно для разных ее столбцов, поскольку корни характеристического уравнения могут иметь разные кратности.

Стоит также обратить внимание на то, что вид формулы (12) вытекает из теоремы 3.

Иначе говоря, появление в решении однородного уравнения независимой переменной как множителя при экспоненте, в случае корней характеристического уравнения кратности больше единицы, имеет ту же «природу», что и резонансном случае.

Поясним это утверждение на примере уравнения

$$y''-2y'+y=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2-2\lambda+1=0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda-1)^2=0 \quad\Longrightarrow \lambda_{1,2}=1.$$

То есть, кратность корня характеристического уравнения в этом случае равна 2. Исходное же уравнение можно решать так:

$$(y''-y')-(y'-y)=0 \quad\Longrightarrow\quad u'-u=0, \quad \text{где } \ u=y'-y.$$

А, поскольку $u(x)=C_1e^x$, то в $y'-y=C_1e^x$ мы имеем резонансный случай и получаем

$$y(x)=(C_1x+C_2)e^x.$$

Поэтому случай кратных корней иногда даже называют *внутренним резонансом.*

Задачи

Напомним, что для получения общего решения однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ .$$

надо:

1) составить характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \, ,$$

2) найти его корни $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_s$
и их кратности $k_1, \ k_2, \ \ldots, \ k_s$.

3) записать решение по формуле

$$y(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + P_2(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x) e^{\lambda_s x} \ ,$$

где $P_j(x) = \sum\limits_{m=1}^{k_j} C_{jm} x^{m-1} \quad \forall j = [1, s]$ — алгебраические многочлены, а C_{jm} – произвольные комплексные константы.

Задача 5. *Найти общее решение уравнения* $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Решение. Поскольку характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

то его корни $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$, кратности 1. Значит, решение имеет вид $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Решение получено.

Задача 6. *Найти общее решение уравнения* $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\lambda + 1)^3 = 0\,.$$

У него $\lambda_{1,2,3} = -1$ один корень кратности 3. Тогда, в силу (12), решение будет таким

Решение получено.

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) e^{-x} \qquad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}.$$

Задача 7. *Найти общее решение уравнения* $y'' + 4y = 0$.

Решение. В этом случае характеристическое уравнение таково

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

его корни комплексные числа $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ кратности 1 каждый. Откуда получаем, что решение имеет вид

Решение получено.

$$y(x) = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Выделение вещественных решений

На практике достаточно часто возникает выделения из общего решения уравнения (10) подмножества вещественных $y(x)$.

В принципе, это всегда можно сделать «в лоб». Например, для задачи 7 положим $C_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $C_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — произвольные вещественные числа. Тогда, по формуле Эйлера

$$y(x) = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} =$$

$$= (\alpha_1 + i\beta_1)(\cos 2x + i \sin 2x) + (\alpha_2 + i\beta_2)(\cos 2x - i \sin 2x) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)\cos 2x - (\beta_1 + \beta_2)\sin 2x +$$

$$+ i\Big((\alpha_2 + \beta_1)\cos 2x + (\alpha_1 + \beta_2)\sin 2x\Big) =$$

$$= R_1 \cos 2x + R_2 \sin 2x + i\Big(Q_1 \cos 2x + Q_2 \sin 2x\Big),$$

где R_1, R_2, Q_1, Q_2 — также произвольные вещественные числа. Положив $Q_1 = Q_2 = 0$, мы выделим подмножество вещественных решений:

$$y(x) = R_1 \cos 2x + R_2 \sin 2x \qquad \forall R_1, R_2 \in \mathbb{R}.$$

При использовании описанного подхода могут возникать вычислительные затруднения, суть одного из которых демонстрирует

Задача 8. *Найти общее решение уравнения* $y^{(4)} + 4y = 0.$

Решение. Для данной задачи характеристическое уравнение будет

$$\lambda^4 + 4 = 0,$$

а его корни — комплексные числа, формально записываемые так: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2i}$ и $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-2i}$.
Чтобы выделить вещественные решения предварительно необходимо представить $\sqrt{i}$ и $\sqrt{-i}$ в формате $\alpha + i\beta$.
Для решения этой задачи используем формулу Эйлера и экспоненциальную форму записи комплексных чисел. Имеем

$$i = 0+1\cdot i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}.$$

Тогда $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)}$, где $k = 0, 1$. Учет периодичности синуса и косинуса здесь оказывается необходимым, поскольку на комплексной плоскости имеется *два различных* числа, квадрат которых равен i. Эти числа будут, соответственно, например, для $k = 0$ и $k = 1$, равны

$$\begin{array}{llcccc} \sqrt{i}_1 = & e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} & = & \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{i}_2 = & e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} & = & \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} & = & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

Корни характеристического уравнения получим, умножив выражения для $\sqrt{i}$ на $\sqrt{2}$. Вычисления для случая $\sqrt{-i}$ аналогичны. Итак, корнями характеристического уравнения будут числа

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad \lambda_3 = -1 - i, \quad \lambda_4 = -1 + i\,.$$

Покажите самостоятельно, что *общее решение* исходного уравнения будет иметь вид

$$y(x) = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x} + C_3 e^{(-1-i)x} + C_4 e^{(-1+i)x} \,,$$

$$\forall\, C_1, C_2, C_3, C_4 \quad \in \mathbb{C},$$

а выделенное *вещественное решение*, соответственно,

$$y(x) = e^{x}(R_1 \cos x + R_2 \sin x) + e^{-x}(R_3 \cos x + R_4 \sin x)\,.$$

Решение получено.

$$\forall\, R_1, R_2, R_3, R_4 \quad \in \mathbb{R}.$$

Однако, даже в случаях, когда корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda = \alpha + i\beta$, задача выделения вещественных решений при больших n может оказаться весьма непростой.

При этом, достаточно часто оказывается, что уравнение (10) имеет *вещественные* коэффициенты

$$y^{(n)} + \rho_1 y^{(n-1)} + \ldots + \rho_{n-1} y' + \rho_n y = 0\,, \tag{13}$$

и требуется найти именно все его вещественные решения.

Тогда мы можем использовать следующий метод.

Пусть характеристическое уравнение будет

$$\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1}\lambda + \rho_n = 0\ . \tag{14}$$

где все коэффициенты *вещественные.*

Получим формулу общего вещественного решения этого уравнения, предполагая, что все комплексные решения, определяемые формулой (12), нами уже найдены.

Убедимся вначале, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. **Пусть уравнение (14) имеет комплексный корень λ_0 кратности k, то есть верно равенство**

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k M_{n-k}(\lambda),$$

где $M_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда оно имеет корень $\overline{\lambda}_0$, причем той же кратности k.

Лемма 2. **Для того чтобы комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ являлась решением уравнения (10), необходимо и достаточно, чтобы вещественные функции $u(x)$ и $v(x)$ также были решениями этого уравнения.**

Лемма 3. **Пусть комплексно-сопряженные функции**

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad \text{и} \quad \overline{y}(x) = u(x) - iv(x)$$

линейно независимы на промежутке X. Тогда будут линейно независимыми вещественные функции $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ и $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$.

Теперь опишем процедуру выделения вещественных решений из общего решения уравнения (13).

В силу леммы 1 для $\lambda_r = \alpha_r + i\beta_r$ – каждого невещественного (то есть с $\beta_r \neq 0$) корня кратности k_r характеристического уравнения (14) – будет существовать сопряженный корень $\overline{\lambda}_r = \alpha_r - i\beta_r$, причем той же кратности.

Следовательно, в табл. 1 для каждой базисной функции

$$y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x}, \quad \text{где } q = 0, 1, 2, \ldots, k_r - 1\,,$$

найдется сопряженная ей функция $\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x}$.

Действительно, по формуле Эйлера:

$$y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x} = x^q e^{(\alpha_r + i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x + i\sin\beta_r x) \quad \text{и}$$

$$\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x} = x^q e^{(\alpha_r - i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x - i\sin\beta_r x)\,,$$

поэтому вещественные линейно независимые функции

$$u_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\sin\beta_r x$$

будут, согласно лемме 2, решениями уравнения (13).

Перейдем в линейном пространстве частных решений однородного уравнения от базиса, содержащегося в табл. 1, к новому базису, в котором каждая пара функций $\{\, y_{qr}(x),\ \overline{y}_{qr}(x)\,\}$ заменена на пару функций $\{\, u_{qr}(x),\ v_{qr}(x)\,\}$.

Заметим при этом, что в силу леммы 3 из линейной независимости функций $y_{qr}(x),\ \overline{y}_{qr}(x)$ и соотношений

$$u_{qr}(x)=\frac{y_{qr}(x)+\overline{y}_{qr}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x)=\frac{y_{qr}(x)-\overline{y}_{qr}(x)}{2i}$$

следует линейная независимость функций $u_{qr}(x),\ \ v_{qr}(x)$,. которые входят в новый базис

Новый базис состоит из n *вещественных* функций, которые обозначим как $\psi_j(x)$. В нем любое вещественное решение уравнения (13) представимо как некоторая вещественная линейная комбинация функций $\psi_j(x)$.

Таким образом, оказывается справедливой

Теорема 5. **Общее вещественное решение уравнения (13) имеет вид**

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j(x) \ ,$$

где R_j **– произвольные вещественные константы.**

Это означает, что в вещественном базисе процедура выделения вещественных решений сводится к тривиальной замене в формуле общего решения комплексных неопределенных констант на вещественные.

Рассмотрим теперь простой, но очень важный для физических и технических приложений, пример.

Задача 9. Найти все вещественные решения уравнения $y''+\omega^2 y = 0$, если $\omega > 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. У него есть два сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ кратности 1 каждое. Поэтому общее комплексное решение исходного уравнения будет

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}.$$

По формуле Эйлера: $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$. Значит,

$$u(x) = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \cos\omega x \quad \text{и}$$

$$v(x) = \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \sin\omega x.$$

Переходя в E^2 – в линейном пространстве решений исходного уравнения – от базиса $\left\{e^{i\omega x};\ e^{-i\omega x}\right\}$ к базису $\{\cos\omega x;\ \sin\omega x\}$, получаем окончательно

$$y(x) = R_1\cos\omega x + R_2\sin\omega x\ ,$$

где R_1 и R_2 – произвольные вещественные константы.

Решение получено.

Применение теоремы 5 иллюстрирует

Задача 10. Найти все вещественные решения уравнения

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0\,.$$

Решение. Характеристическое уравнение будет

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\big(\lambda^2 + 4\big)^2 = 0.$$

У него есть корнь $\lambda_1 = 0$ кратности 1 . А также корни кратности 2, равные

$$\lambda_{2,3} = 2i \quad \text{и} \quad \lambda_{4,5} = -2i\,.$$

Тогда в базисе $\left\{\ 1,\ e^{2ix},\ xe^{2ix},\ e^{-2ix},\ xe^{-2ix}\ \right\}$ комплекснозначное решение будет

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{2ix} + (C_4 + C_5 x)e^{-2ix}\,.$$

Перейдя в E^5 – в линейном пространстве частных решений исходного однородного уравнения, от комплексного базиса к вещественному

$$\left\{\ 1,\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x\ \right\}$$

и заменив комплексные константы вещественными, получим вещественное решение

Решение получено.

$$y(x) = R_1 + (R_2 + R_3 x)\cos 2x + (R_4 + R_5 x)\sin 2x\,.$$

Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \ , \qquad (15)$$

предполагая, что общее решение соответствующего однородного уравнения уже найдено.

Как и ранее, числа

$$\{\, a_1 ,\, a_2 ,\, \ldots ,\, a_{n-1} ,\, a_n \,\}$$

являются произвольными комплексными константами, а $b(x)$ есть комплекснозначная, непрерывная функция, зависящая от вещественного аргумента $x \in X$.

Согласно следствию 2 для построения общего решения неоднородного уравнения (15) достаточно найти какое-нибудь его частное решение.

Мы воспользуемся методом *вариации постоянных* (методом Лагранжа), основой которого является

Теорема 6. **Пусть общее решение** *однородного* **уравнения (15) имеет вид**

$$y(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \cdots + C_n g_n(x) \ ,$$

где функции $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$ **образуют базис в пространстве частных решений однородного уравнения.**
Тогда *неоднородное* **уравнение (15) имеет решение вида**

$$y^*(x) = C_1(x) g_1(x) + C_2(x) g_2(x) + \cdots + C_n(x) g_n(x) \ ,$$

где непрерывно дифференцируемые функции $\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots\ C_n(x)\}$ **находятся из системы линейных уравнений:**

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x) g_1(x) + C_2'(x) g_2(x) + \cdots + C_n'(x) g_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1'(x) + C_2'(x) g_2'(x) + \cdots + C_n'(x) g_n'(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1''(x) + C_2'(x) g_2''(x) + \cdots + C_n'(x) g_n''(x) \ = \ 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x) g_1^{(n-1)}(x) \ + \ \ldots \ + \ C_n'(x) g_n^{(n-1)}(x) \ = \ b(x) \ . \end{array} \right.$$

Следствие 5. **Уравнение (15) интегрируется в квадратурах.**

Теорема 7. **Пусть** $b(x)$ **квазимногочлен вида** $P_m(x)e^{\mu x}$, **где** $P_m(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$, **а** $y^*(x)$ – **некоторое частное решение неоднородного уравнения (15). Тогда найдется алгебраический многочлен** $Q_m(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m$ **такой, что**

– $y^*(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (15) (так называемый** *нерезонансный* **случай);**

– $y^*(x) = x^kQ_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **корень характеристического многочлена уравнения (15) кратности** k **(***резонансный* **случай).**

Следствие 6. **Пусть коэффициенты уравнения (15) вещественны, а** $b(x) = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$**, где** α, β **– вещественные числа,** $A(x)$ **и** $B(x)$ **– вещественные многочлены, один из которых степени** m**, а второй степени не выше, чем** m.

Тогда уравнение (15) имеет частное решение вида

— $y^*(x) = e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\mu = \alpha + i\beta$ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (15) (***нерезонансный* **случай);**

— $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\mu = \alpha + i\beta$ **– корень характеристического многочлена для уравнения (15) кратности** k **(***резонансный* **случай),**

где функции $C(x)$ **и** $D(x)$ **— вещественные алгебраические многочлены степени** m.

Итак, если уравнение неоднородное,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \; .$$

то для получения его *общего* решения, к *общему решению однородного* надо добавить *частное решение неоднородного* уравнения $y^*(x)$, которое находится

1) либо методом *вариации постоянных*,

2) либо, в случае, когда $f(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} C_j x^{j-1} \right) e^{\mu x}$, то есть, $f(x)$ — *квазимногочлен* (или сумма квазимногочленов) в одном из двух следующих видов:

— $y^*(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} D_j x^{j-1} \right) e^{\mu x}$, в *нерезонансном* случае, то есть, когда μ не является корнем характеристического уравнения,

— $y^*(x) = x^p \left(\sum\limits_{j=1}^{k} D_j x^{j-1} \right) e^{\mu x}$, в *резонансном* случае, то есть, когда μ является корнем характеристического уравнения кратности p,

где комплексные константы D_j находятся подстановкой $y^*(x)$ в исходное неоднородное уравнение.

В заключение отметим, что существуют некоторые классы линейных уравнений с *переменными* коэффициентами, которые специальной заменой переменных сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Характерным примером такого класса может служить *уравнение Эйлера n-го порядка*, имеющего вид

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \ ,$$

где a_k – некоторые константы.

Проверьте самостоятельно, что это уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при замене $x = e^t$, причем будут иметь место равенства $y(x) = y\left(e^t\right) = u(t)$:

$$\begin{array}{rcl} xy' & = & \dot{u}\,, \\ x^2 y'' & = & \ddot{u} - \dot{u}\,, \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n y^{('n)} & = & u^{(\cdot n)} + \mu_{n,n-1} u^{(\cdot(n-1))} + \ \dots \ + \mu_{n,2}\ddot{u} + \mu_{n,1}\dot{u}\,, \end{array}$$

где μ_{pq} – постоянные коэффициенты, находимые в процессе последовательного дифференцирования функции $y(x)$.

Заметьте, что здесь штриховой символ обозначает дифференцирование по x, а верхняя точка – дифференцирование по t.

В заключение рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Решение: 1) $y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ - общее решение однородного.

2) Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$.

3) Функции и находим из системы линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}C_1'\\ C_2'\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\ \dfrac{1}{\sin x}\end{Vmatrix}.$$

4) Ее решение (некоторое) $\begin{matrix}C_1'=-1\\ C_2'=\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}C_1=-x\\ C_2=\ln|\sin x|\end{matrix}$

Откуда $y^*(x)=-x\cos x+(\ln|\sin x|)\sin x$.

5) Окончательно $y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+(\ln|\sin x|)\sin x$.

Пример 2. Найти вещественные решения уравнения $y''-3y'+2y=\sin x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$, его корни $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2) Заменив $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, получаем, что $\mu=\pm i$, т.е. резонанса нет. Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x)=A\cos x+B\sin x$.

3). Используем *дополнительные* обозначения:

$$\begin{cases} P=A\cos x+B\sin x \\ Q=-A\sin x+B\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^*{}'=Q \\ y^*{}''=-P \end{cases} \Rightarrow$$

$$-P-3Q+2P=0 \quad \Rightarrow \quad P-3Q=\sin x$$

или $\quad A\cos x+B\sin x-3(-A\sin x+B\cos x)=\sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A-3B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases}.$

Это дает $A=\dfrac{3}{10}, B=\dfrac{1}{10}$.

Ответ: $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{10}(3\cos x+\sin x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y''-4y'+8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, его корни $\lambda_{12} = 2 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x$.

2) Заменив $\sin 2x = \dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$, получаем, что $\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = \pm 2i$, т.е. резонанса нет. Частные решения неоднородного ищем в виде $y_1^*(x) = De^{2x}$ и $y_2^*(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Эти неоднородности будем искать независимо друг от друга.

3) Для первой неоднородности имеем $D(4-8+8)e^{2x} = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad D = \dfrac{1}{4}$. Т.е. $y_1^*(x) = \dfrac{1}{4}e^{2x}$.

4). При поиске второй неоднородности используем *дополнительные* обозначения:

$$\begin{cases} P = A\cos x + B\sin x \\ Q = -A\sin x + B\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{*}{}' = 2Q \\ y^{*}{}'' = -4P \end{cases} \Rightarrow$$

$$-4P - 8Q + 8P = 0 \quad \Rightarrow \quad 4P - 8Q = \sin 2x$$

или $\quad 4A\cos 2x + 4B\sin 2x - 8(-A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4A - 8B = 0 \\ 8A + 4B = 1 \end{cases}$.

Откуда $A = \dfrac{1}{10}, B = \dfrac{1}{20}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x + \dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{20}(2\cos 2x + \sin 2x)$.

Пример 4. Решить уравнение $y''+y'-2y = 3xe^x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, его корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

2) Здесь есть *резонансный* случай, поскольку $\mu = 1$. Так как кратность резонирующего корня равна единице, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*(x) = x(Ax + B)e^x$.

Для удобства вычислений обозначим $D = x(Ax + B)$. Тогда по формуле

$$y^*(x) = De^x$$

Лейбница получим: $y^*{}'(x) = D'e^x + De^x$

$$y^*{}''(x) = D''e^x + 2D'e^x + De^x$$

Подстановка этих соотношений в исходное неоднородное уравнение дает $(D''e^x + 2D'e^x + De^x) + (D'e^x + De^x) - 2(De^x) = 3xe^x$ или $D''+3D' = 3x$.

Но, поскольку $D' = 2Ax + B,\quad D'' = 2A$, то $2A + 3(2Ax + B) = 3x$ и, приравнивая коэффициенты при равных степенях x в правой и левой частях последнего рапвенства, получаем $\begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{3}.$

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x$.

Пример **5 :** Решить уравнение: $x^3y''-2xy = 6\ln x$.

Решение:

1) Имеем $x > 0$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $x^2y''-2y = 6\dfrac{\ln x}{x}$.

2) Делаем замену: $x = e^t$, то есть $t = \ln x$. При этом имеем $\begin{cases} x = e^t, \\ y(x) = y(e^t) \end{cases}$ и $t_x' = \dfrac{1}{x}$.

3) Выразим производные y'_x и y''_{xx} через производные y'_t и y''_{tt} .

Имеем: $y_x' = y_t't_x' = \dfrac{y_t'}{x}$.

Аналогично:

$$y_{xx}'' = (y_x')_x' = \left(\frac{y_t'}{x}\right)'_x = .\frac{(y_t')_x'\cdot x - y_t'}{x^2} = \frac{y_{tt}''\cdot\frac{1}{x}\cdot x - y_t'}{x^2} = \frac{y_{tt}'' - y_t'}{x^2}.$$

5) Тогда уравнение $x^2y''-2y = 6\dfrac{\ln x}{x}$ примет вид $x^2\dfrac{y_{tt}''-y_t'}{x^2} - 2y = 6te^{-t}$

или $y_{tt}''-y_t'-2y = 6te^{-t}$.

6) Общее решение однородного находится при помощи характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ и имеет вид: $y_0(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$.

7) Частное решение (поскольку есть резонанс) ищется в виде $y^8(t) = t(\alpha t + \beta)e^{-t}$ и оказывается равным $y^*(t) = (-t^2 - \dfrac{2}{3}t)e^{-t}$.

8) Возвращаясь к независимой переменной x , получаем общее решение исходного уравнения $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^2 - \dfrac{1}{x}\left(\ln^2 x + \dfrac{2}{3}\ln x\right)$.