Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Для них определены понятие равенства, а также операции сложения и умножения числа на матрицу.

Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 1. Степенью k, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная

$$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k} \ .$$

Кроме того, будем считать, что

$$\|A\|^0 = \|E\| \qquad \text{и} \qquad \|A\|^1 = \|A\|.$$

Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$, и при $k \geq 2:$

$$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим, выполняемые поэлементно, операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

Определение 2.	Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t) \quad \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t \in T$. Тогда элементами матрицы – $\lim\limits_{t\to t_0}\|A(t)\|$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_{ij}(t)$; – $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\,\alpha_{ij}(t)$; – $\int\limits_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{ij}(u)\,du$.

Определения 1 и 2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь нижний индекс без скобок обозначает индекс координаты вектора или элемента матрицы, а нижний индекс в круглых скобках является номером элемента некоторого множества, в данном случае слагаемого в записи ряда.

Определение 3.	Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\|A_{(k)}\|$, если $\forall i,j=[1,n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\alpha_{ij(k)}$, составленный из ij-х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$, сходится к ij-му элементу $\|B\|$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что, в силу определений 2 и 3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования.*

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение 4.	*Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle \|A\| \rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \|\alpha_{ij}\|$.

Теорема 1. **Если** $\left\langle \|A_{(k)}(t)\| \right\rangle \leq a_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall t \in T$, **и мажорирующий числовой ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится** *абсолютно* **и** *равномерно* **на** T.

Также имеет место

Теорема 2. **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots \qquad (1)$$

сходится абсолютно и равномерно на комплексной плоскости в круге $|t| \leq \rho \quad \forall \rho > 0$**.**

Определение 5. Матрица, являющаяся суммой рядя (1), называется *показательной функцией матрицы* $\|A\|$ (или *экспонентой матрицы* $\|A\|$) и обозначается как $e^{t\|A\|}$.

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3. **Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные, порядка n матрицы. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:**

– **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$, **то**

$$e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|} e^{\|B\|} \, ,$$

– $$\frac{d}{dt} \; e^{t\|A\|} = \|A\| \; e^{t\|A\|} \; .$$

Следствие 1. **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для** *матричного* **дифференциального уравнения $\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$.**

Теорема 4. **Общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ может быть представлено в форме**

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = e^{t\|A\|} \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| , \qquad (3)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные комплексные числа.

Другими словами, столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения *задач Коши* для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть соответствующие столбцы единичной матрицы.

Эти решения — линейно независимые и образуют базис в n-мерном линейном пространстве частных решений однородной системы линейных уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, что, очевидно, позволяет представлять общее решение данной системы уравнений как линейную комбинацию базисных решений.

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ (альтернативным следствию 1) служит формула (2). Однако ее использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей.

Более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм, основанный на следующих лемме и теореме.

Лемма 1. **Если матрица $\|D\|$ диагональна, т.е. у нее на главной диагонали стоят числа $\lambda_k \quad \forall k = [1, n]$, а остальные элементы нули, то**

$$e^{\|D\|} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{array} \right\| .$$

Теорема 5. **Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|S\|$ квадратные, порядка n , и пусть матрица $\|S\|$ имеет обратную. Тогда если $\|A\| = \|S\| \, \|B\| \, \|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\| \, e^{t\|B\|} \, \|S\|^{-1} \qquad \forall t \in T \, .$$

В основе альтернативного метода вычисления матричной экспоненты лежит, известная из курса линейной алгебры, теорема о том, что если в U^n существует базис из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, то матрица $\|D\|$, определяемая формулой

$$\|D\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\,,$$

диагональна (здесь $\|S\|$ — матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов).

Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 1), используя теорему 5, можно найти искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\|\,e^{t\|D\|}\,\|S\|^{-1}\,.$$

В случае, когда базиса из собственных векторов матрицы $\|A\|$ нет, всегда возможно, согласно теореме Жордана, перейти к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$.

То есть, иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых клеток вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя суммы какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \qquad \text{где}$$

$$\|J_l(0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$, очевидно, коммутируют, поэтому (согласно теореме 3):

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\|+t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|} \ .$$

где первый сомножитель $e^{t\lambda\|E\|}$ легко вычисляется при помощи леммы 1.

Второй найдем при помощи формулы (2):

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k \; . \qquad (5)$$

Заметим, что, согласно правилу умножения матриц, матраца $\|J_l(0)\|$ является *нуль-потентной*, то есть для нее $\|J_l(0)\|^l = \|O\|$. Поэтому при $k = l$ ряд (5) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых.

В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|}=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{t^k}{k!}\,\|J_l(0)\|^k=$$

$$=\left\|\begin{array}{ccccccc}
1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \ldots & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!}\\
0 & 1 & \dfrac{t}{1!} & \ldots & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!}\\
0 & 0 & 1 & \ldots & \dfrac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!}\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \dfrac{t}{1!}\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right\| . \qquad (6)$$

Вычислив (если это окажется необходимым) аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвратившись в исходный базис по формуле

$$e^{t\|A\|}=\|S\|\,e^{t\|J\|}\,\|S\|^{-1}\ ,$$

получим искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.

Проиллюстрируем изложенную теорию следующим примером.

Задача 1. Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$.

Решение. Решим задачу двумя способами.

В первом способе воспользуемся следствием 1. При этом нам нужно решить, указанные в следствии задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| . \qquad (7)$$

Линейное преобразование, заданное матрицей $\|A\|$ имеет двукратное собственное значение $\lambda_{1,2} = 2$ и соответствующее ему одномерное собственное подпространство, базисом в котором является собственный вектор $\|h_{(1)}\| = \|1\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Найдем присоединенный к $\|h_{(1)}\|$ вектор $\|h_{(2)}\| = \|\eta_1\ \ \eta_2\|^{\mathrm{T}}$, который в нашем случае определяется из системы линейных уравнений

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \eta_1 - \eta_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| .$$

Используя известные формулы для жорданова базиса в двумерном случае, запишем общее решение системы (7) в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = C_1 e^{2t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + C_2 e^{2t} \left(t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right)$$

или в координатной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} \left(t + 1 \right) \ , \\ x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} t \ . \end{array} \right.$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши: первое

из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 0, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{array} \right.$

то есть

$$\left\| \begin{array}{c} x_{1(1)}(t) \\ x_{2(1)}(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left(t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} t+1 \\ t \end{array} \right\| .$$

Аналогично, второе

из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lr} C_1 = & 1, \\ C_2 = & -1, \end{array} \right.$

откуда

$$\left\| \begin{matrix} x_{1(2)}(t) \\ x_{2(2)}(t) \end{matrix} \right\| = e^{2t} \left(\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| - t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{matrix} -t \\ 1-t \end{matrix} \right\| .$$

Наконец, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 1, составляем искомую матрицу для матричной экспоненты

$$e^{t\|A\|} = \left\| \begin{matrix} x_{1(1)} & x_{1(2)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} \end{matrix} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{matrix} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{matrix} \right\| .$$

Во втором варианте решения задачи приведем матрицу к жордановой форме и затем воспользуемся леммой 1 и теоремой 5.

Согласно теореме Жордана, жорданов базис в рассматриваемом случае состоит из элементов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$. Значит $\|S\|$ – матрица перехода от исходного базиса к жорданову – будет иметь вид

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

поскольку ее столбцами служат координатные представления элементов нового базиса.

Как известно, матрица перехода невырожденная, поэтому обратная ей матрица существует и единственна:

$$\|S\|^{-1} = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| .$$

Переход к жордановой форме осуществляется по правилу

$$\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| ,$$

что дает жорданову клетку:

$$\|J_2\| = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right\| .$$

В нашем случае $\lambda = 2$ и $l = 2$, поэтому из (6) и из $t\|J_l(\lambda)\| = \lambda t\|E\| + t\|J_l(0)\|$ следует

$$e^{t\|J_2(\lambda)\|} = e^{2t\|E\|+t\|J_2(0)\|} = e^{2t\|E\|} \cdot e^{t\|J_2(0)\|} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Наконец, по формуле $e^{t\|A\|} = \|S\| \; e^{t\|J\|} \|S\|^{-1}$ получаем

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

Решение получено.

$$= e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$

В заключение обсуждения свойств матричной экспоненты опишем метод, позволяющий находить решения нескольких задач Коши, сформулированных для одного и того же начального $t = t_0$.

Поскольку множество всех частных решений однородной системы линейных ДУ является n-мерным линейным пространством, то ее общее решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|\Phi(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| ,$$

где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ – произвольные комплексные числа. Или же в более компактной форме:

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\|\,\|C\| \ . \tag{8}$$

При этом столбцами матрицы $\|\Phi(t)\|$ (часто называемой *фундаментальной*) являются координатные столбцы базисных частных решений исходной системы. Примером такой матрицы, в силу равенства (3), может служить $e^{t\|A\|}$.

Если в задаче Коши начальное условие имеет вид $\|x(t_0)\| = \|x_0\|$, то

$$\|x_0\| = \|\Phi(t_0)\| \, \|C\| \quad \Longrightarrow \quad \|C\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} \, \|x_0\| \; .$$

Тогда решение задачи Коши (в силу (8)) в базисе с $\|\Phi(t)\|$ будет иметь вид

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\| \|\Phi(t_0)\|^{-1} \, \|x_0\| \tag{9}$$

Пусть $\|Q\|$ – невырожденная матрица, связывающая в пространстве частных решений базисы, имеющие фундаментальные матрицы $\|\Phi(t)\|$ и $e^{t\|A\|}$, такая, что выполнены равенства

$$e^{t\|A\|} = \|\Phi(t)\| \, \|Q\| \qquad \text{и} \qquad e^{t_0\|A\|} = \|\Phi(t_0)\| \, \|Q\| \; .$$

Тогда $\|Q\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} e^{t_0\|A\|}$ и, значит, в базисе с *любой* фундаментальной матрицей $\|\Phi(t)\|$

$$\|\Phi(t)\|\|\Phi(t_0)\|^{-1} = e^{(t-t_0)\|A\|} \, . \tag{10}$$

Наконец, подставив (10) в (9), получим более удобный для практического использования, чем формула (9), вид решения задачи Коши

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|A\|} \, \|x_0\| \ . \tag{11}$$

Эффект использования формулы (11) демонстрирует

Задача 2 Для системы уравнений

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\|$$

найти вещественные решения задач Коши со следующими начальными условиями

$$\left\| x_{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, а собственные векторы

$$\left\| f_{(1,2)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\| \pm i \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| .$$

Тогда общее вещественное решение решаемой системы будет

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left(C_1 \left\| \begin{array}{c} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{array} \right\| + C_2 \left\| \begin{array}{c} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{array} \right\| \right)$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\| .$$

Значит, в нашем случае

$$\Phi(t) = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Матричную экспоненту при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ найдем при помощи формулы (9). Имеем

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) .$$

Откуда находим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) .$$

Тогда, согласно (9),

$$\exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) = \|\Phi(t)\| \left\|\Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} -2\cos t + 4\sin t & 5\cos t - 5\sin t \\ -2\cos t + 2\sin t & 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Наконец, по формуле (11) выписываем решения задачи Коши единообразно для всех трех случаев:

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(1)1}(t) \\ x_{(1)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(2)1}(t) \\ x_{(2)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\dfrac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 10\sin t \\ -2\cos t + 6\sin t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(3)1}(t) \\ x_{(3)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\dfrac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 5\cos t - 5\sin t \\ 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Решение получено.