Задача Коши и ее свойства

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ.

Достаточное условие существования и единственности задачи Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

имеет следующую формулировку.

> Пусть в области G уравнение функция f и ее частные производные по переменным $\{y, y', \ldots, y^{(n-1)}\}$ *непрерывны* и точка $\{x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\} \in \operatorname{int} G$. Тогда при начальных условиях
> $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$
> уравнение (*) локально имеет единственное решение.

Рассмотрим уравнение $y' = x^2 + y^3$. Предположим, что интегральные кривые двух частных решений этого уравнения проходят через одну и ту же точку $\{x_0; y_0\}$. Тогда, в силу однозначности функции f, $y'_1(x_0) = y'_2(x_0)$ и эти кривые пересекаться не могут. Они также не могут и касаться друг друга, поскольку в этом случае решения задачи Коши должны совпадать в некоторой окрестности точки $\{x_0; y_0\}$.

Пусть для уравнения $y'' = x^2 + y^3$ частные решения задачи Коши как с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = a_1$, так и с $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = a_2$ существуют и единственны. При $a_1 \neq a_2$ эти решения различны, а при $a_1 = a_2$ они совпадают. Поэтому *различные* частные решения уравнения могут пересекаться, но не могут касаться друг друга.

Аналогично можно показать, что различные частные решения уравнения $y''' = x^2 + y^3$ могут касаться друг друга.

Продолжение решения задачи Коши.

Задача 01 Доказать, что решение задачи Коши $y' = x - y^2, \quad y(1) = 0$ может быть продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$.

Доказательство.

Поскольку $f(x,y) = x - y^2$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ непрерывны на всей плоскости, то они будут непрерывны и в области D: $\{\, y^2 \le x,\ y \ge 0 \,\}$. Значит, в малой окрестности любой точки этой области задача Коши будет иметь решение.

В области D $y' \ge 0$, то есть $y(x)$ − решение исходной задачи Коши, неубывающая функция. Тогда из начального условия $y(1) = 0$ следует, что продолжение этого решения может быть либо продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$, либо достигает границы $x = y^2$ в некоторой точке $x_0 > 1$, из которой продолжение решения не возможно.

Покажем, что второй случай не будет иметь места. Действительно, в любой точке $x_0 > 1$ мы имеем, что $y(x_0) = \sqrt{x_0}$ и $y'(x_0) = 0$, и поэтому из нее возможно продолжение «во внутрь» D.

Следовательно, решение исходной задачи Коши может быть продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$.

Зависимость решения задачи Коши от параметров

Рассмотрим задачу Коши вида: для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \qquad \text{(Задача } \boldsymbol{A}\text{)}$$

при некотором $\lambda = \lambda_0$ найти частное решение $y^*(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию $y^*(x_0, \lambda) = a(\lambda)$.

Если функции f и a непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то решение $y^*(x, \lambda)$ задачи Коши (***A***) имеет непрерывную производную по параметру λ. При этом функция $u(x) = \frac{dy^*}{d\lambda}$ удовлетворяет уравнению (называемым иногда *уравнением в вариациях*)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \qquad \text{(Задача } \boldsymbol{B}\text{)}$$

и условию $u(x_0) = \frac{da}{d\lambda}$. Значения частных производных в этом уравнении берутся при $\lambda = \lambda_0$ и $y = y^*(x, \lambda_0)$.

Замечания:

1) Как находить решение задачи Коши $y^*(x,\lambda_0)$ − вообще говоря, непонятно, но мы будем предполагать, что оно известно или очевидно.

2) Полезные частные случаи задачи ***B*** :

Если f не зависит от λ и $a(\lambda)=\lambda$, то задача ***B*** упрощается и принимает вид:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot u \quad \text{при условии } u(x_0)=1.$$

Если же a не зависит от λ, то вид задачи ***B*** таков:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot u+\frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad \text{при условии } u(x_0)=0.$$

Задача 02 Для задачи Коши $y' = y + y^2 + xy^3$ $y(2) = \lambda$

найти $\dfrac{dy}{d\lambda}$ при $\lambda = 0$.

Решение.

В данном случае очевидно, что исходная задача Коши имеет при $\lambda = 0$ и $x_0 = 2$ очевидное решение $y^*(x_0, \lambda) \equiv 0$.

Уравнение в вариациях будет иметь вид: $\dfrac{du}{dx} = (1 + 2y + 3xy^2)u$,

а задача $\boldsymbol{B}$, поскольку $y^*(2{,}0) = 0$, $\dfrac{du}{dx} = u$ при условии $u(2) = 1$.

Решение последней дает $u(x) = e^{x-2}$.

Задача 03 Для задачи Коши

$$y' = y + \lambda(x^2 + y^2) \qquad y(0) = 0$$

найти $\dfrac{dy}{d\lambda}$ при $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Решение.

В данном случае $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$ и $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = x^2 + y^2$. Поэтому уравнение в вариациях будет

$$\frac{du}{dx} = (1 + 2\lambda y)u + x^2 + y^2, \quad \text{где } u = \frac{dy^*}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Решение задачи Коши для исходного уравнения при $\lambda = 0$ очевидно

$$y* = Ce^x \text{ при } C = 0 \text{ есть } y*(x) = 0.$$

Подставляем это в (1) и получаем задачу Коши, $\frac{du}{dx} = u + x^2 \quad u(0) = 0$, (2)

решение которой есть искомая производная $u = \frac{dy^*}{d\lambda}$.

Решаем полученную задачу Коши, находим из общего решения неоднородного уравнения (2) $u(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$, что при $u(0) = 0$, должно быть $C = 2$.

Значит, при $\lambda = 0$ $\quad u(x) = \frac{dy^*}{d\lambda}(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.

Задача 04 1) Показать, что прямая $y=1$ есть дискриминантное множество для уравнения $y'^2-(y+1)y'+y=0$, но функция $y(x)=1$ не является решением этого уравнения.

2) Доказать, что через каждую точку прямой $y=1$ проходят ровно две различные интегральные кривые этого уравнения.

3) Найти функцию $y^*(x)$ - решение краевой задачи для данного уравнения $\begin{cases} y^*(0)=0, \\ y^*(2)=e \end{cases}$ и построить график этого решения.

Решение: 1) Дискриминантное множество на плоскости Oxy для уравнения $F(x,y,y')=0$ задается (по определению) как система уравнений следующего вида $\begin{cases} F(x,y,d) \quad = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial d}(x,y,d) = 0. \end{cases}$ В нашем случае эта система будет такой:

$$\begin{cases} d^2-(y+1)d+y=0, \\ \qquad 2d-y-1=0. \end{cases}$$

Откуда получаем, исключая d,

$$d=\frac{y+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y+1}{2}\right)^2-(y+1)\frac{y+1}{2}+y=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(y+1)^2}{4}-y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-1)^2}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad y=1.$$

2) Функция $y(x)=1$ очевидно не удовлетворяет исходному уравнению, поскольку для нее $y'=0$.

3) Общее решение исходного уравнения можно было бы , конечно, искать методом введения параметра. Однако, проще заметить, что по теореме Виета это уравнение представимо в виде $(y'-y)(y'-1)=0$, что дает два семейства функций, являющихся решениями: $\left[\begin{array}{l} y(x)=Ce^{x}, \\ y(x)=x+D. \end{array}\right.$

Возьмем на прямой $y=1$ точку, для которой $x=x_0$. Выбрав конкретно значения $C=e^{-x_0}$ и $D=1-x_0$, мы получим для исходного уравнения две различные интегральные кривые, проходящие через выбранную точку.

4) Заметим, наконец, что при данном выборе констант эти гладкие интегральные кривые не только пересекаются, и касаются друг друга в точке x_0. Действительно, для первого решения

$$y'(x) = Ce^x \qquad \Rightarrow \qquad y'(x_0) = Ce^{x_0} = e^{-x_0}e^{x_0} = 1\ ,$$

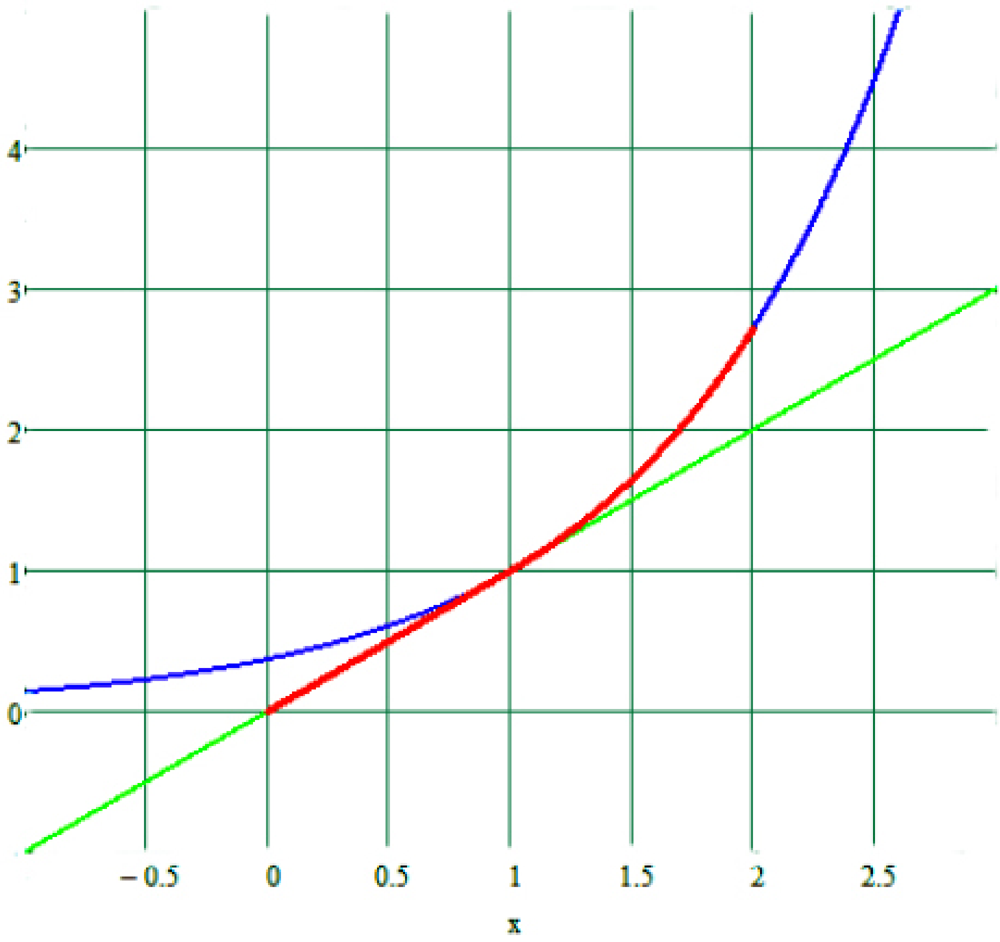
а для второго имеем $y'(x) = 1 \quad \forall D$.

Это означает, что, кроме уже найденных, исходное уравнение будет иметь $\forall x_0$ также и составные решения вида: $y(x) = \begin{cases} e^{x-x_0} & \text{при } x \geq x_0, \\ x+1-x_0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$

Среди этих решений есть функция $y^*(x)$, которая при $x_0 = 1$ будет удовлетворять одновременно условиям $y^*(0) = 0$ и $y^*(2) = e$, т.е. являться решением краевой задачи для исходного уравнения.

Заметьте, что *особых* решений (см.тему 02) тут нет.

График решения краевой задачи показан на рисунке.



Синим и зеленым цветом показаны графики решений задачи Коши (неособые решения).

Красным цветом показано решение краевой задачи (составное решение).