Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Как уже отмечалось, в большинстве случаев решения линейного уравнения с переменными коэффициентами не выражаются даже в квадратурах. Поэтому для практики важными оказываются косвенные методы, позволяющие делать заключения о свойствах таких решений без построения их явного вида.

В рамках этой темы мы ограничимся рассмотрением только *вещественных* функций вещественного переменного, что позволит более широко использовать неравенства для описания свойств решений.

Например, если для уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \tag{1}$$

имеем $a_0(t) > 0\,, t \in \Omega\,$, то (согласно известной из курса математического анализа теореме) можно утверждать, что при $y > 0$ график любого частного решения на Ω будет иметь выпуклость вверх, поскольку в этом случае

$$\ddot{y} = -a_0(t)y < 0\,.$$

Менее очевидные, но также практически полезные методы могут быть применены для исследования *нулей решений*, то есть значений независимой переменной t, для которых искомая функция принимает нулевое значение.

Далее мы будем рассматривать линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,, \tag{2}$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $t \in \Omega$, непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0$.

Вначале убедимся, что уравнение (2) может быть приведено к виду (1) при помощи линейной замены искомой функции по формуле $y(t) = p(t)u(t)$, где $u(t)$ – новая неизвестная функция, а

$$p(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_2(s)}\,ds\right)\,. \tag{3}$$

Действительно, если в уравнение (2) подставить $y(t) = p(t)u(t)$, то мы получим

$$\bigl(a_2p\,\ddot{u} + 2a_2\dot{p}\,\dot{u} + a_2\ddot{p}\,u\bigr) + \bigl(a_1p\,\dot{u} + a_1\dot{p}\,u\bigr) + a_0p\,u = 0$$

или

$$a_2p\,\ddot{u} + \bigl(2a_2\dot{p} + a_1p\bigr)\dot{u} + \bigl(a_2\ddot{p} + a_1\dot{p} + a_0p\bigr)u = 0\,,$$

то есть получаем уравнение, не содержащее слагаемого с $\dot{u}$, поскольку выбранная по формуле (3) функция $p(t)$ удовлетворяет легко проверяемому равенству $2a_2\dot{p} + a_1p = 0\,.$

Для уравнения (1) справедлива

Лемма 1. **Всякое ненулевое решение уравнения (1) может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке.**

Теорема 1. (Штурма о сравнении)

Пусть t_1 и t_2 — соседние несовпадающие нули некоторого нетривиального решения уравнения:

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0, \tag{4}$$

и пусть функции $a_0(t)$ и $A_0(t)$ непрерывны и таковы, что $A_0(t) \geq a_0(t) \ \ \forall t \in [t_1, t_2]$.

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ уравнения

$$\ddot{z} + A_0(t)z = 0 \tag{5}$$

имеет нуль хотя бы в одной точке отрезка $[t_1, t_2]$, при этом либо этот нуль принадлежит (t_1, t_2) , либо

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t_1) = z(t_2) = 0\,, \\ A_0(t) \equiv a_0(t) \ \ \textbf{на} \ \ [t_1, t_2]\,. \end{array} \right.$$

Следствие 1. **На отрезке, где $a_0(t) \le 0$, любое нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (5.4.1) может обратиться в нуль не более чем в одной точке.**

Доказательство

Применим теорему Штурма к паре уравнений

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{z} + 0\,z = 0\,.$$

Предположим, что первое из них имеет на Ω по крайней мере два нуля $t_1 < t_2$. Тогда в силу условия $a_0(t) \le 0 \quad \forall t \in \Omega$ каждое нетривиальное решение второго уравнения в силу теоремы 1 обязано иметь хотя бы один нуль на $[t_1,\, t_2]$.

Однако легко видеть, что $z(t) \equiv 1$ – нетривиальное решение второго уравнения – такого нуля не имеет. Следовательно, предположение о том, что первое уравнение может иметь более одного нуля, неверное.

Следствие доказано.

Заметим, что для случая $a_0(t) > 0$ оценка числа нулей решений уравнения (1) может оказаться более сложной задачей.

Например, для уравнения $\ddot{y} - \dfrac{2}{t^2}y = 0$ каждое из решений $y(t) = C_1 t^2 + \dfrac{C_2}{t}$ (такая функция называется «*Трезубец Ньютона*») в области его определения имеет не более одного нуля, в то время как для уравнения $\ddot{y} + \dfrac{1}{t^2}y = 0$ число нулей каждого решения

$$y(t) = C_1\sqrt{t}\sin(\sqrt{3}\ln\sqrt{t}) + C_2\sqrt{t}\cos(\sqrt{3}\ln\sqrt{t})$$

(находимого, например, при помощи подстановки t^α и формулы Эйлера) неограничено.

Следствие 2. (О чередовании нулей)

В промежутке между любыми двумя соседними нулями одного из двух линейно независимых решений уравнения (5.4.1) содержится ровно один нуль другого решения.

Доказательство

Пусть $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ — линейно независимые, нетривиальные решения уравнения (5.4.1). Применим теорему Штурма к паре уравнений вида

$$\ddot{y}_{(1)} + a_0(t)y_{(1)} = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{y}_{(2)} + a_0(t)y_{(2)} = 0\,.$$

(Мы формально положили $a_0(t) \equiv A_0(t)$).

Если t_1 и t_2 — соседние несовпадающие нули первого уравнения, то между ними имеется хотя бы один нуль второго уравнения t^*. Общих нулей у $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ быть не может. Действительно, если, например, $y_{(1)}(t^*) = y_{(2)}(t^*) = 0$, то вронскиан $W(t^*) = 0$ и решения $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно зависимые. Поэтому $t^* \in (t_1,\, t_2)$.

Остается доказать, что t^* единственное. Предположим, что существует также t^{**} такое, что

$$y_{(2)}(t^{**}) = 0, \quad t_1 < t^* < t^{**} < t_2 \ .$$

Тогда по теореме Штурма у $y_{(1)}(t)$ должен иметься нуль на (t^*, t^{**}), что противоречит предположению о том, что t_1 и t_2 соседние нули решения $y_{(1)}(t)$. Значит $t^* = t^{**}$.

Следствие доказано.

Отметим, что для линейных уравнений порядка большего, чем два ($n > 2$), следствие 2, вообще говоря, неверно. Например, для линейно независимых решений $y_{(1)}(t) = \sin t$ и $y_{(2)}(t) \equiv 1$ уравнения $\dddot{y} + \dot{y} = 0$ чередования нулей нет.

Следствие 3. **Если некоторое нетривиальное решение уравнения (1) имеет бесконечное число нулей, то и каждое его другое нетривиальное решение имеет бесконечное число нулей.**

Проиллюстрируем практическое применение теоремы Штурма следующими примерами.

Задача 1. Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + 2ty = 0 \quad \text{для} \quad t \in [20,\, 45]\,. \tag{6}$$

Решение. По условию задачи $a_0(t) = 2t$. Пусть $\omega^2 \leq a_0(t) \leq \Omega^2$ на указанном в условии задачи промежутке $t \in [20,\, 45]$. Сравним решения данного уравнения с решениями уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0,\ \omega > 0 \quad \text{и} \tag{7}$$

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = 0,\ \Omega > 0\,, \tag{8}$$

решения которых представимы соответственно в виде

$$z(t) = C_1 \sin\left(\omega t + C_2\right) \quad \text{и}$$

$$u(t) = D_1 \sin\left(\Omega t + D_2\right)\,.$$

Рассмотрим вначале пару уравнений (6) и (7). Пусть t_{1z} и t_{2z} — последовательные нули уравнения (7), то есть $t_{2z} = t_{1z} + \dfrac{\pi}{\omega}$, а t_{1y} и t_{2y} — последовательная пара нулей уравнения (6) на промежутке $[t_{1z}, t_{2z}]$. По теореме Штурма имеем

$$t_{1z} \leq t_{1y} < t_{2y} \leq t_{2z}\,.$$

Откуда получаем оценки

$$t_{2y} \leq t_{2z} = t_{1z} + \frac{\pi}{\omega} \leq t_{1y} + \frac{\pi}{\omega}.$$

И окончательно

$$t_{2y} - t_{1y} \leq \frac{\pi}{\omega}. \tag{9}$$

Рассмотрев затем пару уравнений (6) и (8), получаем путем аналогичных рассуждений оценку

$$t_{2y} - t_{1y} \geq \frac{\pi}{\Omega}. \tag{10}$$

Вернемся теперь к условию исходной задачи и рассмотрим два крайних значения параметра: ω и Ω, для которых

$$0 < \ \omega^2 = 40 \ \leq \ 2t \ \leq \ 90 = \Omega^2 \quad \forall t \in [20,\, 45] \ .$$

Для указанного промежутка t расстояние d между соседними нулями исходного уравнения в силу оценок (9) и (10) будет удовлетворять системе неравенств

$$\frac{\pi}{\Omega} \leq d \leq \frac{\pi}{\omega} \, .$$

Откуда получаем искомую оценку

Решение получено.

$$0.3 < \frac{\pi}{3\sqrt{10}} \ \leq \ d \ \leq \ \frac{\pi}{2\sqrt{10}} < 0.5 \ .$$

Задача 2. Доказать, что нетривиальные решения уравнения

$$\ddot{y} + \alpha \left(\sqrt{\frac{3-t}{2}} - \sqrt{t} \right) y = 0 \tag{11}$$

имеют

– при $\alpha = 12$ не более трех нулей ;

– при $\alpha = \dfrac{1}{4}$ не более одного нуля.

Решение. Исследуемое уравнение относится к виду (4). Установим вначале свойства функции $a_0(t)$, позволяющие воспользоваться утверждениями теоремы Штурма и ее следствий.

Во-первых, очевидно, что функция $\left(\sqrt{\dfrac{3-t}{2}}-\sqrt{t}\right)$ определена при $t\in[0,\,3]$ и является монотонно убывающей на этом отрезке, поскольку

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{3-t}{2}}-\sqrt{t}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{\dfrac{3-t}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}<0\,.$$

Значит, она имеет значение $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ – максимальную величину на отрезке $[0,\,3]$, при $t=0$.

Во-вторых, из равенств

$$\sqrt{\frac{3-t}{2}}-\sqrt{t}=\frac{\frac{3-t}{2}-t}{\sqrt{\frac{3-t}{2}}+\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\frac{1-t}{\sqrt{\frac{3-t}{2}}+\sqrt{t}}$$

следует, что для указанных в условии задачи значений параметра α функция $a_0(t)>0$ при $t\in[0,\,1)$ и $a_0(t)\leq 0$ при $t\in[1,\,3]$.

Рассмотрим теперь отдельно случай $\alpha=12$. При $t\in[0,\,1)$ имеет место оценка

$$a_0(t)\leq 12\sqrt{\frac{3}{2}}<12\cdot\frac{4}{3}=16\,.$$

Поэтому в качестве уравнения (5) можно использовать (с $A_0(t)=16$) уравнение

$$\ddot{z}+16\,z=0 \qquad \text{с решением} \quad z(t)=C\sin(4t+\phi)\,. \qquad (12)$$

Из теоремы Штурма следует, что число нулей нетривиального решения уравнения (11) на полуинтервале $[0,\,1)$ не превосходит $N+1$, где N – число нулей нетривиального решения уравнения (12) на том же промежутке.

Расстояние между последовательными нулями решения $z(t)$ равно $d = \dfrac{\pi}{4}$, поэтому N^* – минимально возможное число таких нулей на полуинтервале $[0,\,1)$ – равняется

$$N^* = \left[\frac{\textit{длина}\Big\{\ [0,\,1)\ \Big\}}{d} \right] = \left[\frac{1}{\pi/4} \right] = 1\,.$$

Следовательно, максимальное число нулей нетривиального решения уравнения (11) на полуинтервале $[0,\,1)$ не превосходит $N^*+1=2$.

На отрезке $[1,\,3]$ для уравнения (11) оказывается справедливым следствие 1, что означает наличие у нетривиального решения этого уравнения не более чем одного нуля. Таким образом, нетривиальное решение уравнения (11) на отрезке $[0,\,3]$ в совокупности может иметь не более трех нулей.

В заключение рассмотрим случай $\alpha = \dfrac{1}{4}$. Повторив рассуждения, проведенные для случая $\alpha = 12$, получим оценку

$$a_0(t) \;\leq\; \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} \;=\; \frac{1}{3}.$$

Тогда в качестве уравнения (5) (в пару к (11)) можно взять уравнение

$$\ddot{z} + \frac{1}{3}z = 0 \quad \text{с решением} \quad z(t) = C\sin(\frac{t}{\sqrt{3}} + \phi), \qquad (13)$$

у нетривиального решения которого расстояние между соседними нулями равно $\pi\sqrt{3} > \Big|[0,\,3]\Big| = 3$.

Это означает, что уравнение (13) имеет нетривиальное решение, у которого нет нулей на отрезке $[0,\,3]$. Но тогда нетривиальное решение уравнения (11) может иметь на этом отрезке не более одного нуля.

Решение получено.

В приложениях часто встречаются уравнения, содержащие малый параметр при старшей производной. Исследование асимптотического поведения решений при стремлении значения этого параметра к нулю может оказаться достаточно сложной проблемой, что демонстрирует

Задача 3. Найти $y(t,\varepsilon)$ – решение краевой задачи, где ε – малый по модулю параметр, и $t \in [\,0,1\,]$:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} = F(t)\,, \tag{14}$$

при условиях

$$y(0) = 1 \quad \text{и} \quad y(1) = 2 \tag{15}$$

для

а) $F(t) = 2$,
б) $F(t) = 1$.

Решение. 1°. Рассмотрим вначале случай $F(t) = 2$.

Корнями характеристического уравнения $\varepsilon\lambda^2 + \lambda = 0$ являются числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$, и общее решение однородного уравнения будет

$$y(t, \varepsilon) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) .$$

Поскольку для $\lambda_1 = 0$ мы имеем резонансный случай, то в качестве частного решения неоднородного уравнения (14) можно взять функцию $y(t) = 2t$. Тогда его общее решение будет

$$y(t, \varepsilon) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + 2t ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Решим теперь краевую задачу. Для определения значений констант C_1 и C_2 используем краевые условия (15), из которых следует, что

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right) C_2 + 2 = 2. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$C_1 = \frac{1}{1 - \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}, \qquad C_2 = \frac{1}{1 - \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}$$

и находим решение краевой задачи при $t \in [0, 1]$:

$$y(t, \varepsilon) = \frac{1}{1 - \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{1}{1 - \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + 2t \, .$$

2°. Исследуем теперь вид найденного решения краевой задачи. Имеем при $\varepsilon > 0$

$$\dot{y}(t,\varepsilon) = -\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{t}{\varepsilon}\right)}{1-\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} + 2\ ,$$

откуда следует, что $\dot{y}(t,\varepsilon) = 0$ при

$$t = -\varepsilon\ln\left(2\varepsilon\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right)\ .$$

А вторая производная $\ddot{y}(t,\varepsilon)$ строго знакопостоянна $\forall t \in [0,1]$. Следовательно, функция $y(t,\varepsilon)$ имеет экстремум для достаточно малых по модулю ε (минимум при положительных ε и максимум при отрицательных).

Графики функций $y(t,\varepsilon)$ для

$$\varepsilon = 0.25,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.003$$

показаны на рис. 1.

Исследование при $\varepsilon < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю при помощи замены переменной t на $-t$. Графики функций $y(t, \varepsilon)$ для

$$\varepsilon = -0.25,\ -0.1,\ -0.01,\ -0.003$$

также приведены на рис. 1.

3°. Отметим важный факт, следующий из предыдущего рассмотрения:

предельный переход $\varepsilon \to 0$, выполненный в *решении* задач (14)—(15) приводит к результату, отличающемуся от результата предельного перехода в *условиях* этих задач.

Действительно, если в уравнении (14) положить $\varepsilon = 0$ и оставить лишь одно краевое условие $y(0) = 1$, то мы получим решение для уравнения первого порядка $\dot{y} = 1$ вида $y(t) = 2t$.

Эта функция является решением соответствующей задачи Коши для уравнения с $\varepsilon = 0$. При этом решение исходного уравнения $y(t, \varepsilon)$ сходится к решению задачи Коши на всем полуинтервале $(0, 1]$, но неравномерно.

Данное решение будет близко к решению задачи (14) – (15) везде на отрезке $[\,0, 1\,]$, за исключением малой окрестности точки $t = 0$, где решения будут значительно отличаться.

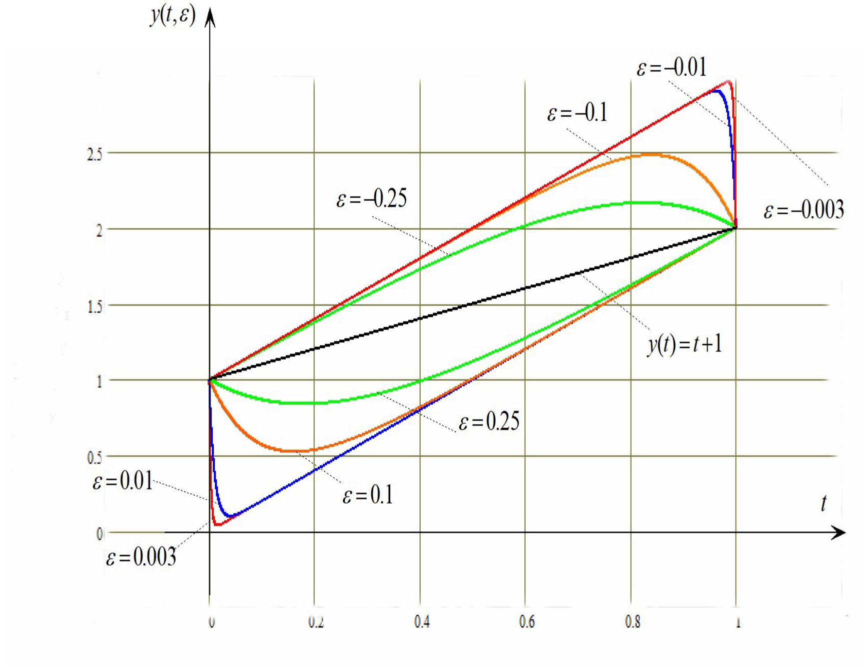
Эту окрестность принято называть *пограничным слоем*, а отмеченное различие решений – *поведением типа пограничного слоя.* Математически природа эффекта пограничного слоя вполне очевидна: возмущенное уравнение (то есть уравнение (14) с $\varepsilon \neq 0$) есть уравнение второго порядка, в то время как невозмущенное является уравнением первого порядка, решения которого могут не удовлетворять двум различным краевым условиям.

В заключение обратим внимание на то, что

во-первых, эффект пограничного слоя возникает не при любом возмущении. Например, в случае б) при $F(t) = 1$ (проверьте это самостоятельно) решение невозмущенной задачи имеет вид $y(t) = t + 1$ и является как решением каждой из двух невозмущенных задач Коши с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y(1) = 2$, так и решением краевой возмущенной задачи при любом ε.

И, во-вторых, пограничный слой образуется у решения $y(t, \varepsilon)$ в разных местах отрезка $[0, 1]$ при разных предельных переходах: $\varepsilon \to +0$ и $\varepsilon \to -0$.

Решение получено.



$y(t,\varepsilon)$
$\varepsilon=-0.01$
$\varepsilon=-0.1$
$\varepsilon=-0.25$
$\varepsilon=-0.003$
$y(t)=t+1$
$\varepsilon=0.25$
$\varepsilon=0.01$
$\varepsilon=0.1$
$\varepsilon=0.003$
t
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Рис. 1

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ И УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Пусть однородное уравнение

$$a_2(\tau)y'' + a_1(\tau)y' + a_0(\tau)y = 0 \quad a_2(\tau) \neq 0$$

приведено к виду $u'' + (1 + f(\tau))u = 0,$ где $\left| f(\tau) \right| \leq \dfrac{C}{\tau^{1+\alpha}}$ $C > 0, \alpha > 0$.

Тогда последнее уравнение будет иметь решения, для которых при $\tau \to +\infty$

$$u(\tau) = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau + O\left(\frac{1}{\tau^{\alpha}}\right) .$$

Уравнение вида $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ (где p - вещественный параметр) называется *уравнением Бесселя*.

Пример 01. Построить асимптотическую оценку решений для уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \ ,$$

для значений параметра $|\,p\,|\le\dfrac{1}{2}$.

Решение: Заметим, что замена неизвестной функции на функцию вида $y(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$ приводит к уравнению $u''+\left(1+\dfrac{\frac{1}{4}-p^2}{x^2}\right)u=0$.

При $|\,p\,|<\dfrac{1}{2}$ можно использовать асимптотическую оценку с $\alpha=1$, которая имеет вид $u(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Откуда окончательно

$$y(x)=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Заметим, что при $|\,p\,|=\dfrac{1}{2}$ уравнение Бесселя решается точно

$$y(x)=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Пример 02. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ не может иметь в положительной полуокрестности нуля $x\in(0,+\infty)$ двух, ограниченных вместе со своими производными, частных линейно независимых решений.

Решение: Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных линейно независимых решения уравнения Бесселя. Тогда их вронскиан будет

$$W(x)=\det\left\|\begin{matrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{matrix}\right\| \neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty) .$$

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ограничены вместе со своими производными, то будет ограничен и их вронскиан

$$\left|W(x)\right| = \left|\det\left\|\begin{matrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{matrix}\right\|\right| = \left| y_1(x)y'_2(x)-y_2(x)y'_1(x)\right| \le$$
$$\le \left|y_1(x)\right|\cdot\left|y'_2(x)\right| + \left|y_2(x)\right|\cdot\left|y'_1(x)\right| .$$

Однако, этого быть не может, поскольку по формуле Лиувилля-Остроградского

$$W(x)=W(1)\cdot\exp\left(-\int\limits_1^x\frac{du}{u}\right)=W(1)\cdot e^{-\ln x} = \frac{W(1)}{x} .$$

То есть, $\left|W(x)\right|\to+\infty$ при $x\to+0$.

Пример 03. Построить асимптотическую оценку решения для уравнения

$$y''+e^{2x}y=0 \ .$$

Решение: 1. Сделаем замену неизвестной функции $t=\varphi(x)\Rightarrow x=\psi(t)$. Пусть $z(t)=y(\psi(t))$.

Дифференцирование по t будем обозначать верхней точкой. Тогда, по правилам дифференцирования имеем

$$y'=\dot{z}\varphi' \qquad \Rightarrow \qquad y''=\ddot{z}(\varphi')^2+\dot{z}\varphi''$$

Для данного в условии уравнения удобно принять $\varphi(x)=e^x$, поскольку в этом случае $\varphi'=\varphi''=e^x$, а исходное уравнение принимает вид

$$e^{2x}\ddot{z}+e^x\dot{z}+e^{2x}z=0 \quad \text{или} \quad \ddot{z}+\frac{1}{t}\dot{z}+z=0 \ .$$

2. Избавимся от слагаемого с $\dot{z}$ при помощи замены $z(t) = a(t)u(t)$, подобрав подходящего вида функцию $a(t)$. Имеем

$$\dot{z} = \dot{a}u + a\dot{u} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z} = \ddot{a}u + 2\dot{a}\dot{u} + a\ddot{u} \; .$$

Откуда $\quad a\ddot{u} + \left(2\dot{a} + \dfrac{a}{t}\right)\dot{u} + \left(\ddot{a} + \dfrac{\dot{a}}{t} + a\right)u = 0$. И искомая функция $a(t)$ определяется уравнением $\quad 2\dot{a} + \dfrac{a}{t} = 0$.

Используя интегрирующий множитель ta, приходим к равенству

$$t\,2a\dot{a} + a^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{(ta^2)} = 0 ,$$

в силу которого можно взять $a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. То есть, будем делать замену неизвестной функции $z(t) = \dfrac{u(t)}{\sqrt{t}}$.

3. Подставляя это выражение в уравнение для $z(t)$, получим (проверьте это самостоятельно) $\ddot{u}+\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)u=0$.

Теперь можно записать асимптотическое решение (с $\alpha=1$)

$$u(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Откуда $z(t)=\frac{C_1\cos t+C_2\sin t}{\sqrt{t}}+O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ и, окончательно,

$$y(x)=C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin e^x+O\left(e^{-\frac{3x}{2}}\right)$$