Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Для описания поведения решений автономной системы

$$\dot{x} = F(x)\,, \quad x \in \Omega \subseteq E^n\,, \tag{1}$$

где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, вещественная вектор-функция, а $x(t)$ $t \in T$ – решение системы (1) на промежутке T, в окрестности неособых точек (или особых точек, где линеаризация не применима) оказываются полезными функции, носящие название первых интегралов.

Определение 1.	Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (1), если $u(x(t)) \equiv \text{const} \;\; \forall t \in T$ для *каждого* решения $x(t)$ этой системы.

Тривиальным примером первого интеграла может служить функция $u(x) \equiv const$. Условия же существования нетривиальных первых интегралов формулируются с помощью понятий *производной в силу системы* и *функциональной независимости* первых интегралов.

Определение 2.	Первые интегралы $\left\{ u_{(k)}(x) \,,\ k = [1, s] \,,\ \ s \leq n \right\}$ называются *функционально независимыми* в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби равен s, то есть, $$\operatorname{rg} \left(\left\| \frac{\partial u_{(k)}}{\partial x_j} \right\| \Bigg|_{x=a} \right) = s \,, \quad \text{где } k = [1, s] \,,\ \ j = [1, n] \,.$$

Согласно этому определению, функциональная зависимость, исходя из известной теоремы о неявных функциях, означает возможность функционально выразить (локально) один первый интеграл через другой.

Следует также отметить различие понятий функциональной зависимости и линейной зависимости. Из линейной зависимости следует функциональная, но не наоборот. Пример: функционально зависимые функции $u_{(1)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ и $u_{(2)}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ в E^2 линейно независимы.

Критерий существования первого интеграла описывает

Теорема 1. **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ являлась первым интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы $\grave{u}(x)$ – производная от $u(x)$ в силу системы (1) – равнялась нулю на каждом решении системы (1).**

Доказательство.

Пусть $x(t)$ некоторое решение системы (1). Рассмотрим функцию $v(t) = u(x(t))$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} F_j(x(t)) = \grave{u}(x(t)) \, .$$

Откуда мы имеем для первого интеграла

$$u(x(t)) = \mathrm{const} \quad \Longleftrightarrow \quad \grave{u}(x(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{v}(t) = 0 \qquad (2)$$

А по теореме Коши через каждую неособую точку Ω проходит некоторая фазовая траектория системы (1), на которой выполняются соотношения (2).

Теорема доказана.

Найдем какие-нибудь первые интегралы для автономной системы

$$\left\{\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & y\,, \\ \dot{y} & = & -x\,, \\ \dot{z} & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Для этого запишем ее в дифференциальном виде

$$\left\{\begin{array}{rcr} \dfrac{dx}{dt} & = & y\,, \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -x\,, \\ \dfrac{dz}{dt} & = & 0 \end{array}\right.$$

и заметим, что справедливы равенства

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = C_1 \qquad\qquad \text{а также} \qquad z = C_2\,.$$

Откуда следует, что функции $u_1(x,y,z) = x^2 + y^2$ и $u_2(x,y,z) = z$ суть первые интегралы.

Затем, использовав, например, критерий первого интеграла, нетрудно убедиться, что и функция $u_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ также есть первый интеграл.

Выясним теперь *геометрический* смысл первого интеграла. Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j и пусть C – любое из значений первого интеграла $u(x)$, принимаемых в Ω.

Тогда уравнение $u(x) = C$ задает в E^n гиперповерхность Γ размерности $n-1$, на которой целиком лежат фазовые траектории системы (1).

Действительно, пусть точка A с радиусом-вектором a принадлежит поверхности Γ, тогда $u(a) = C$. А, поскольку $u(x)$ — первый интеграл, то в любой точке фазовой траектории $x(t)$, проходящей через A, будет $u(x(t)) = u(a) = C$. Значит, вся эта траектория лежит на Γ.

Заметим, что обратное не верно: не любая линия на поверхности уровня есть фазовая траектория.

Проведенные рассуждения справедливы для всех первых интегралов. Поэтому для каждой неособой точки, проходящая через нее единственная фазовая траектория лежит на гиперповерхностях уровня *всех* первых интегралов одновременно (см. рис. 1).

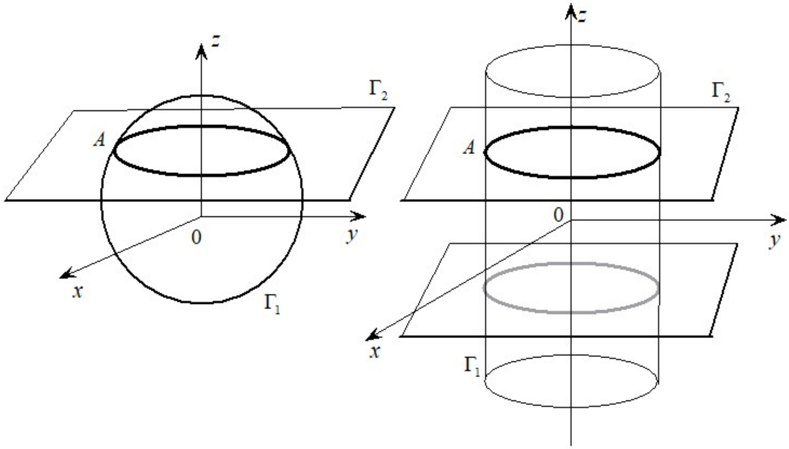

Рис. 1. Связь фазовых траекторий и первых интегралов.

Для фазовой траектории, проходящей через точку A, на левом рисунке показан случай, задающей эту траекторию, системы первых интегралов $u_3(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ и $u_2(x,y,z)=z$, а на правом — системы $u_1(x,y,z)=x^2+y^2$ и $u_4(x,y,z)=z^2$.

Если известен первый интеграл $u(x)$, у которого $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j, то система (1) может быть сведена к системе с меньшим на единицу числом неизвестных функций. Для этого следует x_j выразить при помощи уравнения $u(x) = C$ через остальные неизвестные и подставить это выражение во все (кроме j-го) уравнения исходной системы (1).

Знание же $n-1$ функционально независимых первых интегралов позволяет получить решение системы (1) в квадратурах.

Поскольку любая непрерывно дифференцируемая функция от нескольких первых интегралов системы (1) очевидно также является ее первым интегралом, то первых интегралов у этой системы бесконечно много.

При этом однако возникает вопрос о том какое число из них может оказаться *функционально независимыми.*

Ответ на данный вопрос находится при помощи нижеследующих рассуждений.

Система (1) в неразвернутом матричном виде записывается так:

$$\|\dot{x}\| = \|F(x)\| , \ \ x \in \Omega \subseteq E^n. \tag{3}$$

При гладкой обратимой замене переменных $\|x\| = \|g(y)\|$ с матрицей Якоби

$$\|G(y)\| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\| \ \ \forall i, j = [1, n]$$

и якобианом

$$\det \|G(y)\| = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \qquad \forall y \in \Omega^* ,$$

в области Ω^*, являющейся образом области Ω, автономная система (3) примет вид

$$\|\dot{y}\| = \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\| , \ \ y \in \Omega^* \subseteq E^n. \tag{4}$$

Система (4) непосредственно получается из (3) в силу равенств

$$\|\dot{x}\| = \|G(y)\| \|\dot{y}\| = \|F(g(y))\| .$$

На вопрос о том, как связаны первые интегралы автономных систем (3) и (4), отвечает

Теорема 2. **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)\,,\ x\in\Omega$ являлась первым интегралом системы (3), необходимо и достаточно, чтобы функция**

$$v(y)=u(g(y))\,,\qquad y\in\Omega^*$$

являлась первым интегралом системы (4).

Достаточные условия существования $n-1$ функционально независимого первого интеграла системы (3), а также формулу для любого ее первого интеграла, дает

Теорема 3. **Пусть точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (3). Тогда**

1°. В $\omega \subseteq \Omega$ – некоторой окрестности точки a, существует множество, состоящее из $n-1$ функционально независимых первых интегралов $u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x)$.

2°. Для любого первого интеграла $u(x)$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{n-1})$ такая, что

$$u(x) = \Phi(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x))\,, \quad x \in \omega\,.$$

Следует также иметь в виду, что эта теорема гарантирует существование функции Φ лишь в ω — окрестности неособой точки a, но не *во всей области* Ω .

Что же касается окрестностей положения равновесия, то в них первые интегралы могут как существовать, так и нет. Тут оказывается необходимым дополнительное исследование.

Продемонстрируем теперь некоторые приемы отыскания первых интегралов на примере решения следующих задач.

Основная идея этих приемов – выделение (или искусственное построение) *полных* производных или дифференциалов от сложных функций.

Задача 1. Найти первый интеграл для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^3\,. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что здесь теорема о линеаризации не применима, поскольку положение равновесия линеаризации есть *центр*.

Поступим так: перемножив уравнения исходной системы крест накрест, получим

$$\left(-x_1 + x_1^3\right)\dot{x}_1 = x_2\dot{x}_2 \,,$$

откуда $\quad \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}x_1^2 + \dfrac{1}{4}x_1^4 - \dfrac{1}{2}x_2^2\right) = 0\,$. Значит, например,

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$$

Решение получено. есть первый интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Задача 2. Найти независимые первые интегралы для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x\,, \\ \dot{y} & = & y\,, \\ \dot{z} & = & x^2 + y^2 + z\,. \end{cases}$$

при $x > 0,\ y > 0,\ z - x^2 - y^2 > 0.$

Решение. Исключая независимую переменную t из первых двух уравнений, получаем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, что дает $y = C_1 x$. Значит

$$u_{(1)}(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

есть первый интеграл исследуемой системы дифференциальных уравнений.

При поиске первых интегралов для выделения полных производных или дифференциалов нередко оказывается удобным использование следующего *правила пропорций* (или *свойства равных дробей*) :

если
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{\beta_m} = \gamma\,,$$
то
$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m} = \gamma\,,$$

для произвольных, неравных нулю одновременно чисел $k_1,\,k_2,\,\ldots\,k_m$.

Для использования этого правила запишем исходную систему в так называемом *симметричном виде*, в котором нет явного указания на то, какая из переменных является независимой.
В этом случае для записи системы используются не производные, а дифференциалы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (по правилу пропорций)

$$\frac{(-2x)dx}{(-2x)x} = \frac{(-2y)dy}{(-2y)y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2},$$

а это дает равенство полных дифференциалов

$$\frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2.$$

Из равенства $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2$, в свою очередь, получаем другой первый интеграл

$$u_{(2)}(x, y, z) = \frac{z - x^2 - y^2}{x},$$

Решение получено.

который очевидно независим от найденного ранее, поскольку он в своей записи содержит переменную z.

Связь первых интегралов и теорем о линеаризации и выпрямлении траекторий можно показать на примере следующей автономной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} & = & 3x - 3y^2\,, \\ \dot{y} & = & 3x^2 - 3y\,. \end{cases}$$

Эта система имеет два положения равновесия: точки $\{0;0\}$ и $\{1;1\}$. В начале координат теорема 1 применима. Это седло с $\lambda = \pm 3$, оно неустойчиво. В точке $\{1;1\}$ имеем $\lambda = \pm 3i\sqrt{3}$. Здесь теорема 1 не применима. Нелинейный анализ приводит к заключению, что это — устойчивый по Ляпунову *центрофокус*.

Найдем теперь первый интеграл. Если перемножить уравнения системы «крест- накрест», то получим равенство

$$(3x^2 - 3y)\dot{x} - (3x - 3y^2)\dot{y} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 + y^3 - 3xy = C.$$

Это фазовые траектории и первый интеграл исходной системы. Поскольку $n = 2$, то он единственный функционально независимый.

На рис.2 приведен полный фазовый портрет системы, а на рис.3 и рис.4 показаны окрестности положений равновесия. Наконец на рис.5 приведен фазовый портрет в окрестности неособой точки.

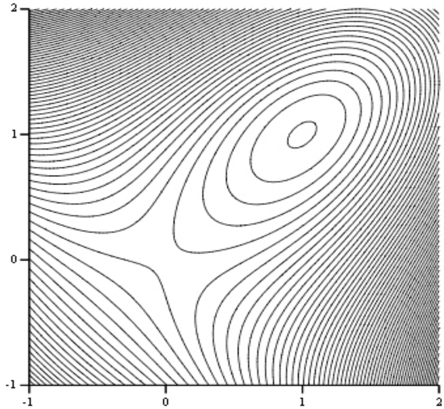

Рис. 2. Связь фазовых траекторий и первых интегралов.

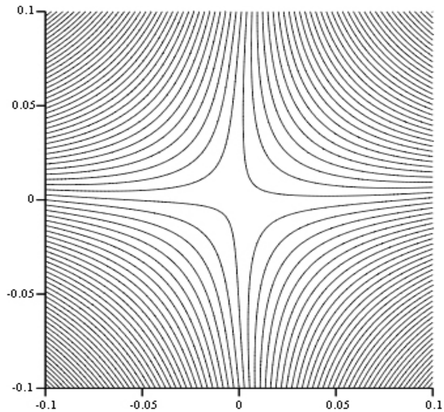

Рис. 3. Связь фазовых траекторий и первых интегралов.

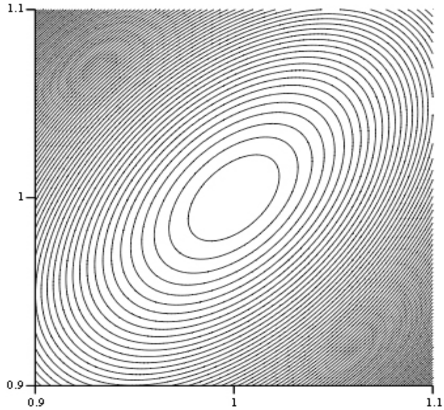

Рис. 4. Связь фазовых траекторий и первых интегралов.

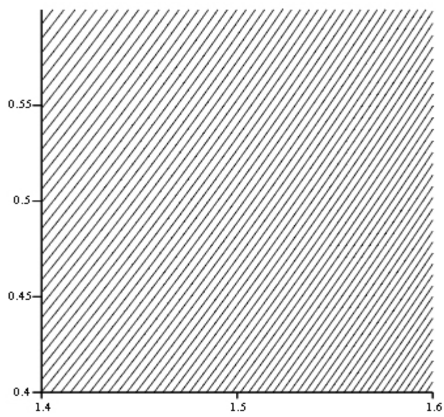

Рис. 5. Связь фазовых траекторий и первых интегралов.