Основы вариационного исчисления

Простейшая задача вариационного исчисления

В курсе математического анализа были рассмотрены задачи отыскания экстремумов функций как одной, так и многих переменных.

Еще в Древней Греции было известно, что линией заданной фиксированной длины, ограничивающей на плоскости фигуру с максимальной площадью, является окружность.

Другой оптимизационной задачей, не решаемой методами конечномерного математического анализа, которую сформулировал в конце XVII века Иоганн Бернулли, является так называемая *задача о брахистохроне*, имеющая следующую формулировку.

> Пусть в вертикальной плоскости даны две не лежащие на одной вертикали точки A и B. Требуется найти гладкую траекторию, соединяющею эти точки, по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из A в B за минимальное время.

Приведем формализованную постановку этой задачи.

Пусть начало координат находится в точке A, ось Ox направлена горизонтально влево, а ось Oy – вертикально вниз. Пусть точка B имеет координаты $\{P,\ Q\}$.

Требуется найти гладкую линию, являющуюся графиком функции $y(x)$ (параметрически $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \end{array} \right.$), начав по которой при $t = 0$ движение из A, под действием силы тяжести материальная точка попадет в B за минимально возможное время.

Как известно из курса физики, скорость движения материальной точки в однородном поле тяжести равна $v = \dfrac{dS}{dt} = \sqrt{2gy}$, в то время как дифференциал длины дуги траектории $dS = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

Откуда
$$dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

Окончательно получаем, что решением задачи является функция $y(x)$, минимизирующая выражение вида

$$J\Big(y(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^P \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)}}\,dx$$

при условиях: $y(0)=0$ и $y(P)=Q$.

Необходимое условие оптимальности в простейшей задаче вариационного исчисления

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция.

Для функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x), y'(x)\Big)dx \tag{1}$$

на множестве $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b] \subset \mathcal{C}^1[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$, найти $y(x)$, минимизирующую этот функционал.

Здесь мы использовали обозначения:

$\mathcal{C}^1[a,b]$ — множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\,(y_1,y_2)=\max_{x\in[a,b]}\Big|y_1(x)-y_2(x)\Big|+\max_{x\in[a,b]}\Big|y_1'(x)-y_2'(x)\Big| \quad \forall y_1,y_2\in\mathcal{C}^1[a,b]\,.$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\langle y\rangle=\max_{x\in[a,b]}\Big|y(x)\Big|+\max_{x\in[a,b]}\Big|y'(x)\Big|\,. \tag{2}$$

Проверьте самостоятельно (это будет полезно для дальнейшего), что множество $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ является линейным пространством, а множество $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ при $|A|+|B|\neq 0$ – нет.

Определение 1.	Будем говорить, что функционал (1) достигает на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $$\forall y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b] \qquad \text{с} \qquad \rho\,(\,y(x),\, y^*(x)\,) < \varepsilon$$ выполняется неравенство $$J(y) \geq J(y^*) \qquad \Big(\,J(y) \leq J(y^*)\,\Big)\,.$$ Если неравенства строгие при $y \neq y^*$, то говорят о *строгом* экстремуме. В случае, когда неравенства удовлетворяются *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, экстремум *абсолютный.*

Задачу отыскания слабого локального экстремума при использовании нормы (2) называют *простейшей вариационной задачей* или же *задачей с закрепленными концами.*

Основным инструментом при исследовании на экстремум функционала вида (1) служит его *вариация* — другой функционал, являющийся аналогом производной по направлению от функции многих переменных.

Для его определения нам потребуется еще одно подмножество в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$, а именно $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $h(x)$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$.

Заметим, что при любом вещественном параметре α функция $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha h(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, если $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Это свойство дает основание называть $\alpha h(x)$ *допустимым приращением* (или, как иногда говорят, *допустимой вариацией*) $y(x)$ – аргумента исследуемого функционала (1).

В этом случае, рассматривая (при малых по модулю α) множество значений функционала-вариации

$$J(y + \alpha h) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)\Big)dx\,, \tag{3}$$

можно делать заключения об экстремальных свойствах исходного функционала (1) в малой окрестности функции $y(x)$ (в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$).

Более конкретно, величину и направление изменения $\Delta J(y+\alpha h)$ (как функции параметра α при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$) можно оценивать числом $\left.\dfrac{d\,J(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

В сделанных предположениях (для малых по модулю значений α) функционал $J(y+\alpha h)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α.

С другой стороны, (3) можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра α, для которого справедлива теорема Лейбница, утверждающая, что

$$\left.\frac{d\,J(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x) \right) dx\,. \qquad (4)$$

Определение 2. Выражение

$$\left.\frac{d\,J(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.
Первую вариацию принято обозначать $\delta J(y,h)$.

Обратите внимание на структурное сходство формулы (4) с формулой

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\,\omega_k \;,$$

определяющей в E^n величину производной функции $F\,(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots\,\xi_n)$ по направлению $\|l\| = \|\,\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n\|^{\mathrm{T}}$.

Необходимое условие существования слабого экстремума, используя понятие первой вариации, формулирует

Теорема 1. **Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то** $\delta J(y^*, h) = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.

Заметьте, что при использовании теоремы 1 необходимо убеждаться в равенстве нулю первой вариации $\delta J(y^*, h)$ одновременно *для всех* функций $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, что может оказаться непростой задачей.

Более удобное для практического использования необходимое условие экстремума (то есть, альтернативу теореме 1) в случае простейшей вариационной задачи можно получить, проверив, что верна (часто называемая *основной леммой вариационного исчисления*)

Лемма 1. **Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a,b]$ **и**

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b],$$

то $f(x) \equiv 0$ **на** $[a,b]$.

Лемма 1 позволяет получить необходимое условие простейшей вариационной задачи в следующей упрощенной форме, которую дает

Теорема 2. **Пусть** $F(x, y, p)$ **дважды непрерывно дифференцируемая при всех** $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ **и** $p \in (-\infty, +\infty)$ **функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция** $y^*(x)$, $x \in [a, b]$ **есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \; . \tag{5}$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$. С учетом формулы (4) это дает

$$0 = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) \Bigg|_{y=y^*} dx.$$

В условиях теоремы второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям

$$0 = \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h(x) \Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\, dx\ ,$$

поскольку $h(a) = h(b) = 0$.

Из непрерывности функции

$$f(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Bigg|_{y=y^*}$$

и основной леммы вариационного исчисления (лемма 1) следует, что $y^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (5).

Теорема доказана.

Определение 3.	Всякое решение уравнения Эйлера (5) называется *экстремалью* функционала $J(x, y, y')$. В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Сделанное при выводе уравнения Эйлера предположение о непрерывности второй производной допустимой экстремали оказывается излишним, если используется

Лемма 2. (Дюбуа-Реймона) **Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a, b]$ **и**

$$\int\limits_a^b f(x)h'(x)\,dx = 0 \qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b],$$

то $f(x) \equiv \text{const}$ **на** $[a, b]$.

Действительно, пусть

$$G(x) = \int\limits_a^x \frac{\partial F(u, y(u), y'(u))}{\partial y}\, du\,.$$

Тогда, в силу теоремы 1 и формулы (4), имеем

$$\delta J(y^*, h) = 0 = \int\limits_a^b \left(G'(x)h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) dx =$$

(интегрируя первое слагаемое по частям)

$$= G(x)h\Big|_a^b - \int\limits_a^b G(x)h'dx + \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\, h'dx = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - G(x) \right) h'dx\,,$$

если учесть, что $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.

Применив теперь утверждение леммы Дюбуа-Реймона, получаем *интегральную форму* уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int\limits_a^x \frac{\partial F}{\partial y}\, du \equiv const\,.$$

Откуда, окончательно следует, что

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

Полученное условие экстремальности является необходимым, но не достаточным. Поэтому, в тех случаях, когда допустимая экстремаль однозначно определяется уравнением Эйлера и граничными условиями, целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремальность непосредственно по его определению.

Использование этого метода иллюстрирует

Задача 1. Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 0, \ y(1) = 2 \ .$$

Решение. Заметим, что

$$J(y) = \frac{1}{4} + \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx$$

и исследование на экстремальность достаточно выполнить для функционала $J(y) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx$.

Составим и решим уравнение Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y' \ , \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'' \ .$$

Тогда, $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y'' - y = 0$.

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

есть множество всех экстремалей, в том числе и допустимых. Граничные условия есть система уравнений

$$\begin{cases} C_1 & + & C_2 & = & 0 \ , \\ C_1 e^{\frac{1}{2}} & + & C_2 e^{-\frac{1}{2}} & = & 2 \ . \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}}\,,$$

и единственная *допустимая* экстремаль дается формулой

$$y^*(x) = \frac{2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}}\,.$$

Исследуем найденную допустимую экстремаль на оптимальность. Пусть $h(x)$ – произвольная пробная функция из класса $\mathcal{C}^1_{00}[0,1]$.

Оценим знак приращения функционала

$$J(y^*+h)-J(y^*)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{(y^*+h)^2}{2}+2((y^*)'+h')^2-\frac{(y^*)^2}{2}-2((y^*)')^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 y^*h\,dx+4\int\limits_0^1(y^*)'h'\,dx+\int\limits_0^1\left(\frac{h^2}{2}+2h'^2\right)dx=$$

(проинтегрировав второй интеграл по частям и перегруппировав слагаемые)

$$=\int\limits_0^1(y^*-4(y^*)'')\,h\,dx+4(y^*)'h\Big|_0^1+\int\limits_0^1\left(\frac{h^2}{2}+2h'^2\right)dx\geq 0,$$

поскольку первый интеграл равен нулю в силу равенства $y^*-4(y^*)''=0$, а проинтегрированная часть есть ноль по свойству пробной функции $h(0)=h(1)=0$.

Таким образом, приходим к заключению о том, что допустимая экстремаль $y^*(x)$ доставляет исследуемому функционалу абсолютный минимум.

Решение получено.

Допустимая экстремаль, находимая из уравнения Эйлера, вообще говоря, не обязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

Задача 2. Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left(y'^2 - \frac{25}{4} y^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 1, \ y(\pi) = 2 \ .$$

Решение. Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4} y = 0 \; .$$

Его общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos\frac{5x}{2} + C_2 \sin\frac{5x}{2} \; ,$$

а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2} \; .$$

Возьмем $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[0,\pi]$ вида $h(x) = \dfrac{1}{k}\sin nx$, где k и n – произвольные натуральные числа. Тогда, выполнив преобразования аналогичные сделанным при решении задачи 1, получим

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) dx = \left(n^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2k^2}.$$

Откуда следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Delta J < 0 \quad \text{при} \;\; n = 1;\, 2 \qquad \text{и} \qquad \Delta J > 0 \quad \text{при} \;\; n \geq 3\,.$$

Решение получено. Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.

В заключение обсуждения постановки простейшей задачи вариационного исчисления обратим внимание на то, что в определении 1 в названии типа экстремума присутствует прилагательное «слабый». Возникает вопрос: какой смысл в использовании этого термина?

Ответ заключается в том, что линейное пространство, образованное функциями непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ не является конечномерным. Действительно, при исследовании функционалов на экстремум необходимо иметь количественную оценку степени близости произвольной пары элементов в этом пространстве. Как известно, одним из способов построения такой оценки является введение нормы элемента (например по формуле (2), т.е. превращение рассматриваемого линейного пространства в нормированное. Однако, различные типы норм в линейных пространствах, не имеющих базиса, не эквивалентны друг другу и могут приводить при решении экстремальных задач для одного и того же функционала к различным результатам.

Поясним сказанное следующим примером.

Рассмотрим как альтернативу линейному пространству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой (2) нормированное линейное пространство функций, имеющих непрерывную производную, кроме быть может, конечного числа точек на $[a, b]$, в которых производная имеет разрыв первого рода. Норму во втором пространстве определим по формуле

$$\langle y \rangle = \max_{x \in [a,b]} \left| y(x) \right| .$$

По сложившейся исторически традицией экстремум с такой с нормой принято называть «сильным».

В качестве упражнения найдите допустимую экстремаль для задачи с условиями

$$J(y) = \int\limits_0^1 {y'}^3 \, dx \; , \qquad y(0) = 0, \;\; y(1) = 1 \; .$$

Используя определение 1 с разными нормами, покажите, что в этой задаче на допустимой экстремали $y(x) = x$ имеется слабый экстремум, но нет сильного.

В более общем виде связь между условиями существования сильного и слабого экстремума на допустимой экстремали можно сформулировать так:

> необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума есть достаточное условие слабого.

Задачи вариационного исчисления с функционалами обобщенного вида

Рассмотрим теперь более общие постановки задач вариационного исчисления, а именно случаи, когда оптимизируемый функционал представляется:

– интегралом, зависящим от производных высших порядков;

– интегралом, зависящим от нескольких неизвестных функций;

– кратным интегралом от неизвестной функции нескольких переменных;

Далее мы будем использовать очевидные аналоги определений для экстремумов и экстремалей, приводя лишь те определения, которые содержат существенно новые условия.

Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим $\mathcal{C}^k[a,b]$ – множество всех k раз ($k \geq 2$) непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{x\in[a,b]} \left| y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) \right| \ ,$$

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^k[a,b] \ .$$

Ясно, что в этом случае множество $\mathcal{C}^k[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y, p_1, \ldots, p_k)$ непрерывно дифференцируемая $k+1$ раз при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p_i \in (-\infty, +\infty)$ $\forall i = [1, k]$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k)}(x)\right) dx \qquad (6)$$

на множестве $\mathcal{C}^k_{\vec{A}\vec{B}}[a, b] \subseteq \mathcal{C}^k[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y^{(i)}(a) = A_i$ и $y^{(i)}(b) = B_i$ $\forall i = [0, k-1]$.

Повторяя рассуждения проведенные для простейшей вариационной задачи, нетрудно убедиться, что равенство нулю первой вариации есть необходимое условие существования экстремума функционала (6), откуда следует

Теорема 3. **Если** $2k$ **раз непрерывно дифференцируемая функция** $y^*(x) \in \mathcal{C}^k_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$ **является слабым экстремумом для функционала (6), то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера – Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0\ .$$

Эта теорема позволяет выделять «подозрительные на экстремум» для функционала (6) функции.

Функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций

Пусть $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ – множество всех вектор-функций $\vec{y}(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$ компонентами $y_k(x)$ $\forall k \in [1,n]$. В этом случае $\vec{y}'(x)$ также будет являться вектор-функцией с компонентами $y_k'(x)$ $\forall k \in [1,n]$. И пусть расстояние между вектор-функциями $\vec{y}_{(1)}(x)$ и $\vec{y}_{(2)}(x)$ определяется формулой

$$\rho\left(\vec{y}_{(1)}(x), \vec{y}_{(2)}(x)\right) =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\, y_{1k}(x) - y_{2k}(x)\,| + \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |\, y'_{1k}(x) - y'_{2k}(x)\,|$$

$$\forall\ \vec{y}_{(1)}(x), \vec{y}_{(2)}(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]\ .$$

Множество $\vec{\mathcal{C}}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y_k \in (-\infty, +\infty)$ и $p_k \in (-\infty, +\infty)$ $\forall k = [1, n]$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F\Big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\Big) dx \tag{7}$$

на множестве $\vec{\mathcal{C}}^1_{\vec{A}\vec{B}}[a, b] \subseteq \vec{\mathcal{C}}^1[a, b]$ функций $\vec{y}(x)$, удовлетворяющих условиям $y_k(a) = A_k$ и $y_k(b) = B_k$ $\forall k = [1, n]$.

Тогда будет справедлива

Теорема 4. **Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{y}^{*}(x) \in \vec{\mathcal{C}}^{1}_{\vec{A}\vec{B}}[a,b]$ является слабым экстремумом для функционала (7), то ее компоненты удовлетворяют** *системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0 \qquad \forall k \in [1,n]\ .$$

Функционалы, являющиеся кратными интегралами

Пусть $F(x, y, \xi, \eta, \kappa)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $(x, y) \in \Omega$ и $(\xi, \eta, \kappa) \in (-\infty, +\infty)$ функция.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) dxdy \tag{8}$$

на множестве $\mathbf{C}^1_G(\Omega) \subseteq \mathbf{C}^1(\Omega)$ функций $u(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$u(x, y) = G(x, y) \; \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

где $G(x, y)$ некоторая заданная и непрерывная на $\partial\Omega$ функция.

В сделанных предположениях оказывается справедливой

Теорема 5. **Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция** $u^*(x,y) \in \mathbf{C}^1_G(\Omega)$ **является слабым экстремумом для функционала (8), то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера – Остроградского*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \kappa} = 0 ,$$

где $\eta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\kappa = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, **а** $\dfrac{\partial}{\partial x}$ **и** $\dfrac{\partial}{\partial y}$ **— операторы** *полных* **частных производных.**

Задачи вариационного исчисления с граничными условиями обобщенного вида

Рассмотрим возможное обобщение постановки простейшей вариационной задачи для следующего частного случая.

Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. И пусть $y(x)$ принадлежит $\mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ – множеству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций таких, что $y(a) = A$.

Определение 4.	Задача отыскания слабого экстремума (то есть, поиска функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ с $y^*(a) = A$) функционала $$J(y) = \int\limits_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx \qquad (9)$$ называется *задачей со свободным концом.*

Данное название отражает тот факт, что искомая функция при $x = b$ может иметь любое значение.

Необходимое условие оптимальности для задачи со свободным концом дает

Теорема 6. **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция** $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a,b]$ **есть решение задачи со свободным концом, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0\ . \tag{10}$$

Условные вариационные задачи

В ряде практически важных вариационных задач дополнительные условия (сужающие множество допустимых вариаций) не сводятся лишь к модификации оптимизируемого функционала или граничных условий, а являются ограничениями более общего вида.

Приведем возможную постановку такой задачи. Пусть функции $F(x,y,p)$ и $G(x,y,p)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x \in [a,b]$ и $y\,;\,p \in (-\infty,+\infty)$. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала по $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{11}$$

при условии

$$H(y) = \int\limits_a^b G(x,y(x),y'(x))\,dx = l\ , \tag{12}$$

где A, B и l – заданные числа. Уравнение (12) принято называть *условием связи*, а функционал (11) — *целевым функционалом.*

Метод решения изопериметрической задачи – отыскания локального слабого экстремума функционала (11) – при условии (12), является аналогом метода множителей Лагранжа для задачи на условный экстремум функций многих переменных.

Его основой служат функция Лагранжа

$$L(x,y(x),y'(x),\lambda)=F(x,y(x),y'(x))+\lambda G(x,y(x),y'(x))\ ,\quad \lambda\in R$$

и

Теорема 7. **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$ есть решение изопериметрической задачи и вариация $\delta H(y^*,h)\neq 0 \quad \forall h(x)\in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$, тогда найдется такое λ, что $y^*(x)$ удовлетворяет** *уравнению Эйлера* **следующего вида**

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=0\ .$$

Проиллюстрируем применение этой теоремы следующими примерами.

Задача 3. Решить изопериметрическую задачу для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2\, dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0,\ y(1) = 2$ и условием связи

$$H(y) = \int\limits_0^1 xy\, dx = 1\ .$$

Решение. Лагранжиан в данной задаче имеет вид

$$L(x,y,y',\lambda)=(y')^2+\lambda xy.$$

Уравнение Эйлера для него будет $2y''-\lambda x=0$, поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda x\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial y'}=2y'\ ,\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=2y''\ .$$

Подставив общее решение уравнения Эйлера – уравнение экстремалей –

$$y(x)=\frac{\lambda}{12}x^3+C_1x+C_2$$

в условие связи и приняв во внимание граничные условия, находим, что $C_1=\frac{9}{2}$, $C_2=0$ и $\lambda=-30$ и, следовательно, допустимая экстремаль имеет вид

$$y^*(x)=-\frac{5}{2}x^3+\frac{9}{2}.$$

Выясним теперь тип найденной допустимой экстремали.

Пусть пробная функция $h(x)$ такова, что $h(0)=h(1)=0$.

Кроме того, условие связи не должно нарушаться при варьировании, поэтому из равенства

$$\int\limits_0^1 x(y^*+h)\,dx = 1 \quad \text{должно следовать} \quad \int\limits_0^1 xh\,dx = 0\,.$$

Имеем оценку

$$\Delta J = J(y^*+h) - J(y^*) = \int\limits_0^1 \left(2(y^*)'h' + (h')^2\right)\,dx =$$

(интегрируя по частям первое слагаемое и используя уравнение Эйлера $2(y^*)'' - \lambda x = 0$, получаем с учетом свойств функции $h(x)$)

$$= 2y^{*\prime}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2(y^*)''h\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2dx =$$

$$= -\lambda\int\limits_0^1 xh\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2dx = \int\limits_0^1 (h')^2dx \geq 0\,.$$

Решение получено. То есть $y^*(x)$ доставляет целевому функционалу абсолютный минимум.

Задача 4. Среди непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a, b]$ функций $y(x) \geq 0$ таких, что $y(a) = y(b) = 0$ и имеющих график длины L, найти те, у которых на этом промежутке площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью Ox, максимальна.

Решение. Лагранжев функционал в рассматриваемой задаче будет

$$L(x, y, y', \lambda) = J(x, y, y') + \lambda H(x, y, y') =$$

$$= \int\limits_a^b y(x)\,dx + \lambda \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int\limits_a^b \Big(y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \Big)\,dx\,.$$

Для этого функционала уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0\,,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x-C_1}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = \frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}\,.$$

Откуда окончательно получаем, что

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda^2\,.$$

Поскольку система координат ортонормированная, то полученное уравнение, определяющее искомую функцию $y(x)$, есть уравнение окружности радиуса $|\lambda|$ с центром в точке $A(C_1,\,C_2)$ и проходящей через точки с координатами $(a,\,0)$ и $(b,\,0)$. См. рис. 1.

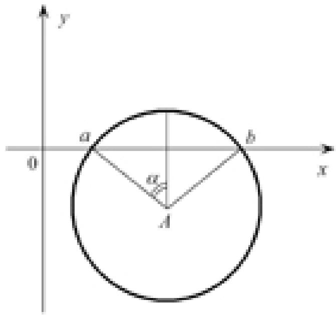

Рис. 1. К решению задачи 4.

Условия $y(a)=y(b)=0$, записанные в виде

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (a-C_1)^2 & + & C_2^2 & = & \lambda^2\,, \\ (b-C_1)^2 & + & C_2^2 & = & \lambda^2\,, \end{array}\right.$$

дают $C_1=\dfrac{a+b}{2}$.

Пусть угол $\angle aAb$ равен 2α. Тогда в силу свойств окружности (известных из курса элементарной геометрии) будет справедливо равенство:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{b-a}{L}.$$

Поскольку это уравнение (в условиях задачи) всегда однозначно разрешимо относительно α, то значения параметров λ и C_2 также однозначно могут быть найдены из соотношений

Решение получено.

$$\lambda=\frac{2\alpha}{L} \qquad \text{и} \qquad C_2=\lambda\cos\alpha\,.$$

В заключение обратим внимание на необходимость аккуратного использования определения экстремума функционала в задачах вариационного исчисления.

Проиллюстрируем особенность задач вариационного исчисления следующим примером.

Теорема 8. (Неравенство Виртингера) **Пусть функция** $h(x)$
- **непрерывна на** $[0,\pi]$**,**
- $h(0) = h(\pi) = 0$ **и**
- **имеет производную с интегрируемым квадратом на** $(0,\pi)$,

тогда справедливо неравенство

$$I = \int\limits_0^\pi \left(h'^2(x) - h^2(x)\right)\, dx \geq 0\,. \tag{13}$$

Доказательство.

Продолжим функцию $h(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ нечетным образом. Тогда разложения в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе для функций $h(x)$ и $h'(x)$ будут

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx \qquad \text{и} \qquad h'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, b_k \cos kx\,,$$

причем, в силу равенства Парсеваля,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^2(x)\, dx = \pi \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} h'^2(x)\, dx = \pi \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2\ .$$

Функции $h^2(x)$ и $h'^2(x)$ четные по построению, поэтому

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left(h'^2(x) - h^2(x)\right)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(h'^2(x) - h^2(x)\right)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(k^2-1\right) b_k^2\right) \geq 0\ ,$$

поскольку $k \geq 1$.

Теорема доказана.

Таким образом, тот факт, что подынтегральная функция представима в виде разности полных квадратов, вообще говоря не позволяет сделать заключение об отсутствии у функционала знаковой определенности — в данном примере функции $h(x)$ и $h'(x)$ не являются *независимыми*.