Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение	*Нормальной системой* линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$ где $t \in T$, $x_k(t)$ $k = [1, n]$ – комплексно-значные непрерывно дифференцируемые неизвестные функции вещественного аргумента, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на T функции, называемые *свободными членами*. Числа a_{ij} $\forall i, j = [1, n]$ – комплексные константы.

Рассмотрим теперь *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \ . \tag{1}$$

Свойства ее общего решения – совокупности всех частных решений – описываются следующими утверждениями.

Теорема 1. (Принцип супер-позиции) **Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\| + C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант C_1 и C_2.**

Следствие 1. **Множество всех частных решений однородной системы (1) образует линейное пространство.**

Предположим теперь, что $\|A\|$ – матрица системы уравнений (1) – задает в n-мерном унитарном пространстве U^n со стандартным базисом линейный оператор (точнее, линейное преобразование) $\widehat{A}$.

Возникает вопрос: «При каких $\|f\| \in U^n$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ частное нетривиальное решение системы (1) есть вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$?».

Чтобы ответить на него, подставим эту вектор-функцию в исходную систему, получим

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| \quad \Rightarrow \quad \|f\|\lambda e^{\lambda t} = \|A\|\|f\|e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \|A\|\|f\| = \lambda\|f\|$$

поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$.

Напомним что ненулевой элемент $f \in U^n$ называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим *собственному значению* λ, если $\widehat{A}f = \lambda f$.

В координатной форме (как показывается в курсе линейной алгебры) последнее равенство будет иметь вид

$$\|\widehat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| \ .$$

Таким образом, оказывается справедливой

Теорема 2. **Для того, чтобы вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлась частным *ненулевым* решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а λ – соответствующим собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$ в U^n.**

Вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений устанавливает

Теорема 3. **Пусть в линейном пространстве U^n существует базис $\left\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\right\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

- $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (1);**
- **и каждое частное решение системы (1) может быть представлено в виде** $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.

Следствие 2. **В условиях теоремы 3, линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (1), является n-мерным.**

Таким образом, в тех случаях, когда из собственных векторов линейного преобразования $\widehat{A}$ можно образовать базис в U^n, общее решение системы (1) определяется теоремой 3.

В качестве *достаточных* признаков такой возможности удобно использовать следующие, доказываемые в курсе линейной алгебры, критерии.

Из собственных векторов линейного преобразования можно образовать базис в U^n, если

– все собственные значения $\widehat{A}$ попарно различны или;

– матрица $\|\widehat{A}\|$ эрмитовская (т.е., $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad \forall i, j = [1, n]$) в U^n (или же, в случае E^n, симметрическая).

Использование теоремы 3проиллюстрируем следующей задачей.

Задача 1. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= & & x_2(t) & + & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= & x_1(t) & & - & x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= & x_1(t) & - \; x_2(t). & & \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.
Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$

Или $\quad (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0\,, \quad$ откуда $\quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 1\,.$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений

$$\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\| \ .$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \| -1\ 1\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \ . \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|1\ 0\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимые и образуют базис в U^3. Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| e^{t} + C_3 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{t},$$

Решение получено.

где C_1, C_2 и C_3 – произвольные комплексные числа.

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то часто оказывается необходимым выделение из общего комплексного решения его вещественного подмножества.

Это можно сделать путем перехода в линейном пространстве частных решений системы (1) к вещественному базису.

Действительно, в случае вещественной матрицы системы (1) невещественные корни характеристического уравнения будут попарно комплексно сопряженными. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары вектор-функций, являющимися решениями, входящими в базис.

Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары. И процедура этого выделения практически совпадает с методом, изложенным для случая линейного уравнения с постоянными коэффициентами, рассмотренным нами ранее.

Различие заключается в некоторых технических деталях, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

Задача 2. Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= 3x_1(t) + x_3(t). \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \implies (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2+4\right) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$.

Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \xi_2 + \xi_3 = 0 \,, \\ \xi_1 = 0 \,, \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \;\; 1 \;\; -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0\ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0\ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|-2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные постоянные.

Построим теперь вещественный базис в линейном пространстве частных решений системы (1).

Пусть $\Phi(t) = \left\| \begin{matrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re}\Phi(t) + i\operatorname{Im}\Phi(t)$. Найдем $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\operatorname{Im}\Phi(t)$. Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi(t) = \left(\left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| + i \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t\right) =$$

$$= \left(\left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| e^t \cos 2t - \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| e^t \sin 2t \right) +$$

$$+i \left(\left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| e^t \sin 2t + \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| e^t \cos 2t \right) .$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

`Решение получено.`

где R_1, R_2 и R_3 – произвольные вещественные постоянные.

В простых задачах для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно использовать обычный метод исключения неизвестных. Это демонстрирует

Пример 01. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = \quad x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом исключения.

Решение: 1) Имеем из первого уравнения $y = x - \dot{x}$. Откуда $\dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$.

Тогда из второго уравнения $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$.

2) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$.
Откуда $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

3) Подставляя в это в первое уравнение, получаем

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - (-C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t}) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \ .$$

4) Итог в матричном виде будет $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} e^{3t}$.

Для полноты картины убедимся, что использование теоремы 3 приводит к тому же самому решению, что и метод исключения:

Пример 02. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{Vmatrix}$, поэтому из $\det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$ получаем $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$.

2) Находим собственные векторы:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и}$$

$$\begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}.$$

3) Откуда, окончательно, $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = C_1\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}e^{-t} + C_2\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}e^{3t}$.

Рассмотрим теперь случай, когда теорема 3 не применима.

Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \tag{1}$$

в случае, когда условия теоремы 3 не выполнены, то есть, базис из собственных векторов построить не удается.

Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратного* корня у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, задаваемого в U^n матрицей $\|A\|$, в случае, когда размерность собственного подпространства строго меньше кратности этого корня.

Напомним, что в случае базиса из собственных векторов общее решение системы (1) представляется следующим образом.

Пусть в линейном пространстве U^n существует базис $\left\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\right\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда общее решение системы (1) имеет вид:

$$\|x(t)\| = C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}\ , \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (1);

В чем заключается полезность наличия базиса из собственных векторов?

Дело в том, что в базисе из собственных векторов матрица линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n имеет диагональный вид, а система (1) с диагональной матрицей распадается на n независимых уравнений (первого порядка с постоянными коэффициентами) легко решается

$$\dot{y}_j(t) = \lambda_j y_j(t) \quad \forall j = [1, n] \qquad \Longrightarrow \qquad y_j(t) = D_j e^{\lambda_j t}\,.$$

Остается лишь сделать обратный переход к исходному базису и получить формулу (2). Это выполнить легко, так как собственные значения линейного преобразования не зависят от выбора базиса.

Теперь рассмотрим случай, когда базис из собственных векторов построить не удается.

Тогда можно воспользоваться *теоремой Жордана*, о том, что для *любого* линейного преобразования $\widehat{A}$ существует базис, в котором его матрица блочно-диагональная, причем ее блоками являются квадратные матрицы вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l.

Заметим, что матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в U^l, у которого есть единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l и которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку

$$\operatorname{rg} \|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0 \widehat{E}\| = l - 1.$$

Значит, размерность собственного подпространства равна единице и базис из собственных векторов $\widehat{J}_l$ в U^l, в U^l не существует.

Покажем, что система линейных уравнений (1), у которой матрица есть жорданова клетка, хотя и не распадается на независимые уравнения, но, тем не менее, решается достаточно просто.

Действительно, в этом случае система (1) имеет вид

$$\|\dot{y}\| = \|J_l(\lambda_0)\|\|y\| \tag{4}$$

То есть,

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{array} \right\|$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \ , \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \ , \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l \ , \\ \dot{y}_l = \lambda y_l \ . \end{array} \right.$$

Последнюю систему удобнее решать, сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \ \ \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t)$ $\forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \ , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) \ , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) \ , \\ \dot{u}_l(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$u_l(t) = C_l \ ,$$

$$u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ ,$$

$$u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ .$$

Откуда

$$y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ ,$$

$$y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1}\Big) e^{\lambda t} \ ,$$

$$y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2}\right) e^{\lambda t} \ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1\right) e^{\lambda t} \ .$$

Таким образом мы получаем общее решение системы линейных уравнений (4).

Переход к исходным неизвестным выполняется по стандартным формулам обратного перехода от жорданова базиса к исходному, которые позволяют получить общее решение системы (1).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как по виду матрицы $\|A\|$ можно постоить жорданов базис.

Элементы базиса в U^l, в котором преобразование $\|\widehat{A}\|$ имеет матрицу вида (3), согласно (см. курс ЛА) *определению матрицы линейного преобразования*, должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,.
\end{array} \tag{5}$$

Пусть λ_0 – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в U^n. Тогда можно дать

Определение 1. Элементы $\|h_{(1)}\|$, $\|h_{(2)}\|$, $\ldots$, $\|h_{(l)}\|$, принадлежащие U^l и являющиеся решениями уравнений:

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,,
\end{aligned} \tag{4}$$

в то время как уравнение

$$\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длины l, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

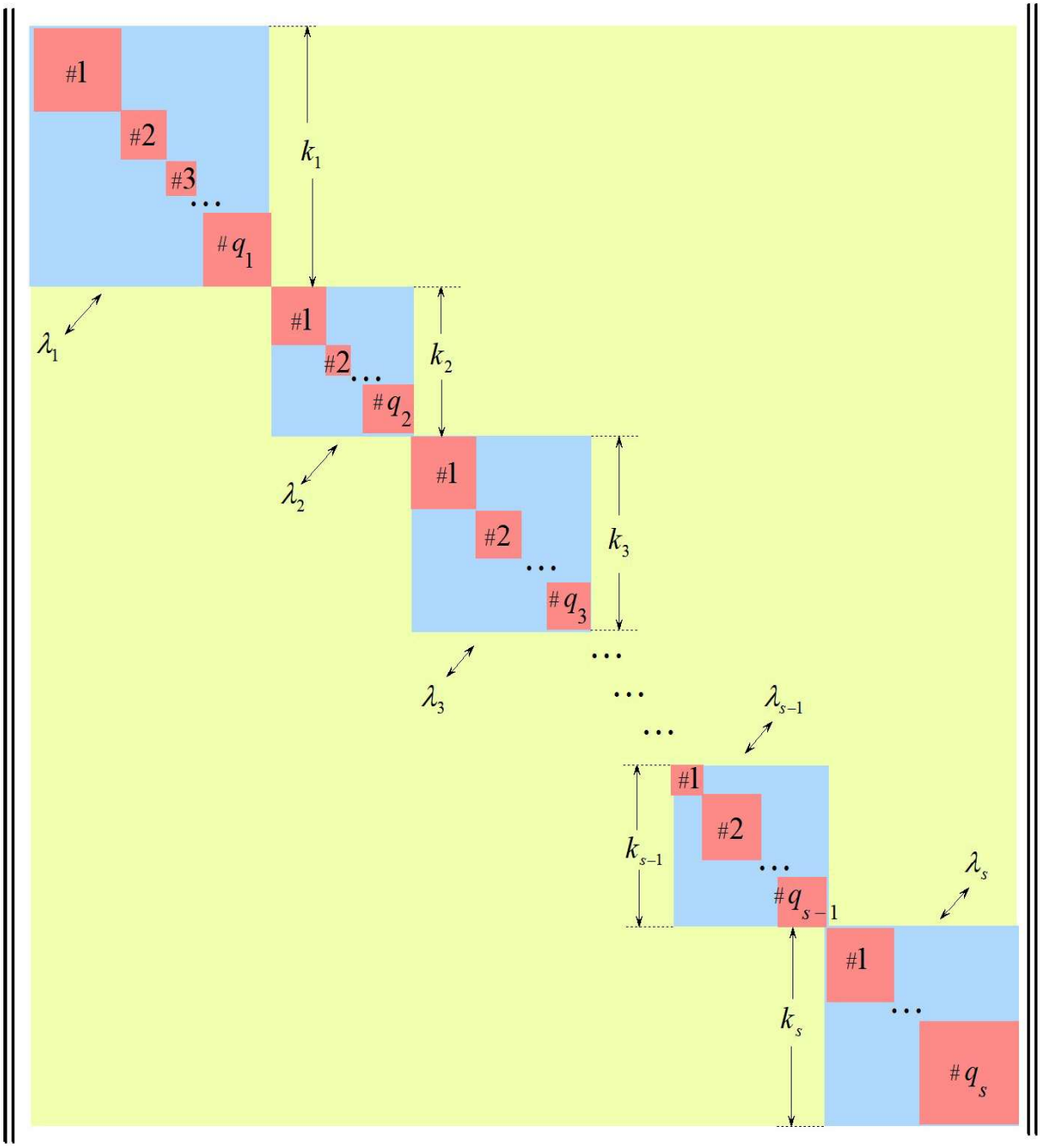
Элементы $\|h_{(2)}\|$, $\|h_{(3)}\|$, $\ldots$, $\|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n, заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Определение 2.	Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она представлена в следующем блочно-диагональном виде



Жорданова матрица

Жордановы блоки

Жордановы клетки

Здесь символ # означает номер клетки в блоке

Итак, q_j равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_j, и для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Конкретно:

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right)e^{\lambda t}\ , \tag{6}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (5).

Пусть теперь $n = 3$.

В случае, когда λ_1 имеет кратность 1 и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 — двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t}\ .$$

Если же в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t}\ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) + \\ + C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg) e^{\lambda t} \ .$$

Во всех формулах C_1, C_2 и C_3 – произвольные комплексные константы.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Случай ЖОРДАНОВА БАЗИСА)

Для того, чтобы из собственных векторов линейного преобразования можно было построить базис, нужно, чтобы для каждого корня характеристического уравнения кратности k имелось k *линейно независимых* собственных векторов. Но это имеет место не всегда: известно (из курса ЛА), что m -максимальное число таких векторов - находится в диапазоне $1 \le m \le k$. На следующих примерах убедимся, что какое бывает.

Сначала рассмотрим тривиальную задачу.

Пример 03. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$ методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, поэтому из $\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0$

получаем $\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{123} = 0, \quad k = 3$.

2) Очевидно, что линейно независимые собственные векторы для $\hat{A}$ суть

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и, кроме того,} \quad e^{\lambda t} = e^{0t} = 1,$$

3) Откуда, получим окончательно, что

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix}, = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall C_1, C_2, C_3 .$$

Теперь рассмотрим задачи с менее очевидными решениями.

Пример 04. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}$. Находим собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, которое задается этой матрицей.

Имеем $\det\begin{Vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$ и соответственно

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = 1 \quad k = 2.$$

Собственные векторы находятся из уравнения $\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\| \left\| f \right\| = \left\| o \right\|$ или

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Первое базисное частное решение $\left\| f \right\| e^{\lambda t} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t$.

2) Линейно независимый собственный вектор здесь *один* и в двумерном пространстве он базиса не образует. Найдем присоединенный вектор. из условия $\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\| \left\| h_{(1)} \right\| = \left\| f \right\|$. Это дает

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

3) Используем табличную формулу $\left(t\left\| f \right\| + \left\| h_{(1)} \right\|\right)e^{\lambda t}$ для построения второй базисной вектор-функции: $\left(t\left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right)e^{t}$.

Заметим, что для большей наглядности мы здесь (и в дальнейшем) используем обозначение $\left\| f \right\|$ для собственного вектора, с которого начинается жорданова цепочка. Второй же вектор в жордановой цепочке (он же − первый присоединенный вектор) обозначается как $\left\| h_{(1)} \right\|$.

4) Теперь можно записать общее решение:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| e^{t} + C_2 \left(t\left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right)e^{t}.$$

5) Делаем проверку на окончание жордановой цепочки: пытаемся решить уравнение

$$\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| \left\| h_{(2)} \right\| = \left\| h_{(1)} \right\| .$$

Или $\left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$ система не совместна. О.К.

Пример 05. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$ методом неопределенных коэффициентов.

Решение: 1) Если k – кратность собственного значения λ, больше размерности собственного пространства m, то решение, отвечающее этому λ можно искать в виде следующего *векторного квазимногочлена* с компонентами:

$$x_p(t) = \left(\alpha_{0p} + \alpha_{1p}t + \ldots + \alpha_{k-m,p}t^{k-m}\right)e^{\lambda t} \qquad p = [1, n] \ .$$

Проблема в том, что среди $n(k-m+1)$ неопределенных коэффициентов должно быть n *независимых*, через которые остальные коэффициенты будут выражаться. Но через какие именно?

В нашем случае $\lambda = 1, k = 2$ и $m = 1$. Поэтому будем искать решения в виде

$$\begin{cases} x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^t, \\ y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t. \end{cases}$$

2) Подставляем в исходную систему и сокращаем оба равенства на экспоненту, получаем:

$$\begin{cases} \beta_1 + (\beta_0 + \beta_1 t) = 3(\beta_0 + \beta_1 t) - (\alpha_0 + \alpha_1 t) \\ \alpha_1 + (\alpha_0 + \alpha_1 t) = 4(\beta_0 + \beta_1 t) - (\alpha_0 + \alpha_1 t) \end{cases}$$

3) Если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t, то получается

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = 3\beta_0 - \alpha_0 & \Rightarrow & \beta_1 = 2\beta_0 - \alpha_0 \\ \beta_1 = 3\beta_1 - \alpha_1 & \Rightarrow & \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 4\beta_0 - \alpha_0 & \Rightarrow & \alpha_1 = 4\beta_0 + 2\alpha_0 \\ \alpha_1 = 4\beta_1 - \alpha_1 & \Rightarrow & \alpha_1 = 2\beta_1 \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_0 = 2\beta_0 - \beta_1 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t, \\ y(t) = [(2\beta_0 - \beta_1) + 2\beta_1 t]e^t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t, \\ y(t) = [2(\beta_0 + \beta_1 t) - \beta_1]e^t. \end{cases}.$$

4) Наконец, в матричном виде находим

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = \beta_0 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t + \beta_1 \left(t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \right) e^t ,$$

где нетрудно заметить, что вектор $\left\| \bar{h}_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$ также является присоединенным, т.е., удовлетворяет условию $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| \left\| \bar{h}_{(1)} \right\| = \left\| f \right\|$.
Действительно, мы имели

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} ,$$

но будет верным и

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

Отметим также, что решение у нас само собой выразилось через две произвольные константы: β_0 и β_1.

Пример 06. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = \quad -2y - 2z, \\ \dot{y} = 3x + 5y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2y \quad - z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0.$$

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_1 = 2$. Для этого надо решить систему

$$\begin{Vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Получаем $\left\| f_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Следовательно, первая базисная вектор-функция будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t}$.

3) Ищем собственные векторы для $\lambda_{23} = 1$, решая систему уравнений

$$\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\left\| f_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}$ и вторая базисная вектор-функция $\begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t$.

4) Поскольку для $\lambda_{23} = 1$ имеем $k = 2$, а $m = 1$ (почему так?), то базиса из собственных векторов построить не удастся.

Будем искать присоединенный вектор по формуле $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| \left\| h_{(1)} \right\| = \left\| f \right\|$.
Заметим, что основная матрица этой системы та же, что и основная матрица системы в п. 3).

Имеем

$$\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

В качестве ее решения − присоединенного вектора, можно взять $\left\| h_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

Согласно табличной формуле $\left(t \left\| f_{(2)} \right\| + \left\| h_{(1)} \right\| \right) e^t$ третья базисная вектор функция будет $\left(t \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \right) e^t$.

5) В итоге формула общего решения принимает вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ я(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t + C_3 \left(t \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \right) e^t$$

Пример 07. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 .$$

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 2)^3 = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_{1,2,3} = 2$. Для этого надо решить систему

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Получаем $\left\| f_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Следовательно, первая базисная вектор-функция будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t}$.

3) Поскольку оказалось, что линейно независимый собственный вектор в этой задаче только один, то будем искать два присоединенных к нему вектора, решая систему уравнений

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\left\| h_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

А затем, аналогично

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\left\| h_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

4) В итоге, согласно формуле решения для $k = 3$ с $m = 1$, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t} + C_2 \left(t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) e^{2t} + C_3 \left(\frac{t^2}{2} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right) e^{2t}$$

Пример 08. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{Vmatrix} = 0 .$$

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 1)^3 = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_{1,2,3} = 1$. Для этого надо решить систему

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \ .$$

Здесь $k = 3$ и $m = 2$ и, поскольку ранг основной матрицы системы оказывается равным единице, то получаем, приняв неизвестные φ_2 и φ_3 за свободные,

$$\left\| f_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| f_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} .$$

3) Будем искать присоединенный вектор по формуле $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| \left\| h_{(1)} \right\| = \left\| f \right\|$.
Заметим, что основная матрица этой системы та же, что и основная матрица системы в п. 3). Имеем

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad .$$

Тут очевидно, что решений нет.

Попробуем иначе

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Но и тут нет решений. Что же делать?

Дело в том, что жорданова цепочка обязательно начинается с *собственного вектора*, но, вообще говоря, *не с любого*.

Попытаемся найти в собственном подпространстве, отвечающему $\lambda = 1$, подходящий собственный вектор в виде

$$\left\| h_{(1)} \right\| = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}.$$

Согласно теореме Кронекера-Капелли для разрешимости системы

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{rg} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \mathrm{rg} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & \alpha + \beta \\ 2 & -2 & -2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & \beta \end{Vmatrix}$$

что будет иметь место при $\alpha = 2$ и $\beta = -1$.

Значит, надо решать систему

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

Это дает присоединенный вектор $\left\| h_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$, на котором, как нетрудно проверить, данная жорданова цепочка и заканчивается.

5) В итоге формула общего решения принимает вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} e^t + C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} e^t + C_3 \left(t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) e^t$$

Обратите внимание, что в этой формуле в качестве второго линейно независимого собственного вектора взят именно тот, для которого удалось построить жорданову цепочку.