

Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \quad \forall t \in T \subset R^1, \quad (1)$$

где элементы матрицы $\|A\|$ — комплексные константы. Комплексно-значную нелинейную и непрерывную вектор-функцию $\|b(t)\|$ будем называть для краткости *неоднородностью*.

Теорема 1. **Общее решение неоднородной системы (1) представимо как сумма общего решения однородной системы (1) и частного решения этой же неоднородной системы (1).**

Достаточно часто поиск частного решения линейной неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 2. Пусть $\|x_{(1)}(t)\|$ — решение системы (1) с неоднородностью $\|b_{(1)}(t)\|$, а $\|x_{(2)}(t)\|$ — решение системы (1) с неоднородностью $\|b_{(2)}(t)\|$, тогда

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Согласно теореме 1, для решения неоднородной системы (1) необходимо (помимо общего решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной.

Как и в случае линейного неоднородного уравнения n -го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах методом *вариации постоянных*, который описывает

Теорема 3. **Частным решением системы (1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^n C_k(t) \|g_{(k)}(t)\| , \quad (2)$$

где $\{\|g_{(1)}(t)\|, \|g_{(2)}(t)\|, \dots, \|g_{(n)}(t)\|\}$ — некоторый базис в линейном n -мерном пространстве частных решений однородной системы (1), а функции $C_k(t)$ находятся из матричного уравнения

$$\sum_{k=1}^n \dot{C}_k(t) \|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| .$$

Практическое использование метода вариации постоянных продемонстрируем для следующей задачи.

Задача Найти все вещественные решения системы уравнений

1.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение. 1°. Матричная форма данной системы будет

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{vmatrix}.$$

Для построения частного решения неоднородной системы предварительно необходимо найти общее решение однородной, которая имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$$

Поскольку нас интересует только общее вещественное решение исходной неоднородной системы, метод варииации постоянных естественно применить, используя общее вещественное решение однородной.

Убедитесь самостоятельно, что это решение может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} \sin t \\ \cos t \end{vmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы.

2°. Согласно схеме метода вариации постоянных частное решение неоднородной системы следует искать в виде

$$\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = C_1(t) \begin{vmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{vmatrix} + C_2(t) \begin{vmatrix} \sin t \\ \cos t \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, которые (согласно утверждению теоремы 3) можно найти из матричного уравнения

$$\dot{C}_1(t) \begin{vmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{vmatrix} + \dot{C}_2(t) \begin{vmatrix} \sin t \\ \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Напомним, что последнее равенство получается при подстановке (3) в исходную неоднородную систему.

3°. Используя правила операций с матрицами нетрудно показать, что равенство (4) есть неоднородная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{vmatrix}, \quad (5)$$

решение которой найдем по теореме Крамера:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix} = -\cos t,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t},$$

Откуда

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\cos t, \\ \dot{C}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \end{cases} \implies \begin{cases} C_1(t) = -\sin t, \\ C_2(t) = \cos t + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

4°. По формуле (3) получаем частное решение неоднородной системы

$$\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = (-\sin t) \begin{vmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{vmatrix} + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t} \right) \begin{vmatrix} \sin t \\ \cos t \end{vmatrix},$$

что, после выполнения операций с матрицами, дает (проверьте это самостоятельно)

$$\begin{vmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем выписать общее решение исходной неоднородной системы

$$\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} \sin t \\ \cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{vmatrix},$$

Решение получено.

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы.

В случае, когда неоднородности в системе (1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k , $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$ и $\sin \beta t$, ее частное решение может быть найдено без интегрирования — методом неопределенных коэффициентов.

Действительно, при $\mu = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

Теорема **Пусть система уравнений (1) такова, что**

4. $\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\mu t}$, где

$$\|p(t)\| = \|a_{(m)}\|t^m + \|a_{(m-1)}\|t^{m-1} + \dots + \|a_{(1)}\|t + \|a_{(0)}\|.$$

Тогда частное решение системы (1) имеет вид $\|q(t)\|e^{\mu t}$, где $\|q(t)\|$ — вектор-многочлен

- той же самой степени, что и $\|p(t)\|$, если μ не является корнем характеристического уравнения;
- степени не выше, чем $m+l$, если μ является корнем характеристического уравнения, а l — размер максимальной из жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы $\|A\|$.

Описанный метод проиллюстрируем примером.

Задача Решить систему уравнений

2.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + e^t + e^{2t} - 2t^2, \\ \dot{y} = 2x + 3e^t + 2e^{2t} - t^2. \end{cases}$$

Решение. 1°. Запишем решаемую систему в следующей матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} e^t + \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} e^{2t} + \begin{vmatrix} -2t^2 \\ -t^2 \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = \|A\| \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \|b_{(1)}\| e^t + \|b_{(2)}\| e^{2t} + \|b_{(3)}\| t^2.$$

введя (удобные для дальнейших расчетов) обозначения

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|b_{(1)}\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix},$$

$$\|b_{(2)}\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \|b_{(3)}\| = \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix},$$

2°. Теперь построим по стандартной схеме общее решение однородной системы:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$$

Найдем вначале собственные значения линейного преобразования с матрицей $\|A\|$:

$$\det \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2 \end{array}$$

и соответствующие собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{vmatrix} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

В итоге получаем общее решение однородной системы

$$\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} e^t + C_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} e^{2t}.$$

3°. Используя теорему 2, найдем теперь частные решения исходной неоднородной системы отдельно для каждой из неоднородностей, содержащих соответственно $\|b_{(1)}\|$, $\|b_{(2)}\|$ и $\|b_{(3)}\|$.

Рассмотрим подробно случай неоднородности $\|b_{(1)}\| e^t$, которая является векторным квазимногочленом, у которого $\mu = \lambda_1 = 1$, причем $m = 0$, а $l = 1$, поскольку μ совпадает с однократным корнем характеристического многочлена (это — резонанс!)

Значит, частное решение следует искать в виде

$$\left\| r_{(1)}^* \right\| = \left(\|a_{(01)}\| + t \|a_{(11)}\| \right) e^t,$$

где первый нижний индекс у $\|a_{(ij)}\|$ равен показателю степени t , а второй — номеру частного решения.

Подстановка этой формулы в неоднородную систему

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \|A\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \|b_{(1)}\| e^t$$

дает

$$\begin{aligned} & \left(\|a_{(01)}\| + \|a_{(11)}\| + t \|a_{(11)}\| \right) e^t = \\ & = \|A\| \left(\|a_{(01)}\| + t \|a_{(11)}\| \right) e^t + \|b_{(1)}\| e^t. \end{aligned}$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , находим, что

$$\begin{cases} \|A\| \|a_{(11)}\| = \|a_{(11)}\|, \\ \|A\| \|a_{(01)}\| + \|b_{(1)}\| = \|a_{(01)}\| + \|a_{(11)}\| \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\|A\| - \|E\|) \|a_{(11)}\| = \|o\|, \\ (\|A\| - \|E\|) \|a_{(01)}\| = \|a_{(11)}\| - \|b_{(1)}\|. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что матрицы в левых частях обоих уравнений системы (6) вырождены. Это есть следствие равенства $\mu = \lambda_1 = 1$.

При этом первое уравнение (как однородное) совместно и имеет неединственное решение вида $\|a_{(11)}\| = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$.

Второе же уравнение неоднородное, оно будет иметь решения, вообще говоря, не при любом $\|a_{(11)}\|$. Но его можно сделать совместным, подобрав подходящее значение α .

Действительно, расширенная матрица второго уравнения системы (6) будет иметь ранг, равный рангу основной матрицы (что по теореме Кронекера–Капелли гарантирует совместность), если будут выполнены равенства

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 2\alpha - 3 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Это дает $\alpha = 2$ и $\|a_{(11)}\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\|$. Вектор $\|a_{(01)}\|$ здесь неоднозначен, его можно взять равным $\|a_{(01)}\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right\|$ и тогда $\|r_{(1)}^*\| = \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t$.

Случаи неоднородностей $\|b_{(2)}\|$ и $\|b_{(3)}\|$ рассматриваются аналогично первому.

Второй случай также резонансный, причем частным решением оказывается квазимногочлен нулевой степени (теорема 4 это допускает), то есть,

$$\|r_{(2)}^*\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t}.$$

В третьем случае резонанса нет, а частное решение имеет вид

$$\|r_{(3)}^*\| = -\frac{1}{4} \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 13 \end{array} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\|.$$

Окончательно получаем общее решение неоднородной системы

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} + \\ + \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} - \\ \text{Решение} \\ \text{получено.} \quad -\frac{1}{4} \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 13 \end{array} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$