

Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n . Для них определены понятие равенства, а также операции сложения и умножения числа на матрицу.

Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 1.

Степенью k , где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная

$$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \dots \cdot \|A\|}_k .$$

Кроме того, будем считать, что

$$\|A\|^0 = \|E\| \quad \text{и} \quad \|A\|^1 = \|A\|.$$

Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$, и при $k \geq 2$:

$$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \dots \cdot \|A\|^{-1}}_k$$

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим, выполняемые поэлементно, операции *пределного перехода, дифференцирования и интегрирования*.

**Определение
2.**

Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t) \quad \forall i, j = [1, n]$ и $\forall t \in T$. Тогда элементами матрицы

- $\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t)\|$ будут числа $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha_{ij}(t)$;
- $\frac{d \|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\frac{d}{dt} \alpha_{ij}(t)$;
- $\int_{t_0}^t \|A(u)\| du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int_{t_0}^t \alpha_{ij}(u) du$.

Определения 1 и 2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь нижний индекс без скобок обозначает индекс координаты вектора или элемента матрицы, а нижний индекс в круглых скобках является номером элемента некоторого множества, в данном случае слагаемого в записи ряда.

**Определение
3.**

Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$, если $\forall i, j = [1, n]$ числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$, составленный из ij -х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$, сходится к ij -му элементу $\|B\|$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной и равномерной сходимости* рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что, в силу определений 2 и 3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почлененного дифференцирования и интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение
4.

Нормой матрицы $\|A\|$ называется число $\langle \|A\| \rangle$, равное $\max_{i,j=[1,n]} |\alpha_{ij}|$.

Теорема **Если** $\langle \|A_{(k)}(t)\| \rangle \leq a_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \forall t \in T$, **и мажонирующий числовой ряд** $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится абсолютно и равномерно на** T .

Также имеет место

Теорема Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

сходится абсолютно и равномерно на комплексной плоскости в круге $|t| \leq \rho \quad \forall \rho > 0$.

Определение
5.

Матрица, являющаяся суммой ряда (1), называется *показательной функцией матрицы* $\|A\|$ (или *экспонентой матрицы* $\|A\|$) и обозначается как $e^{t\|A\|}$.

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3. Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные, порядка n матрицы. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:

$$-$$
 если $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$, то

$$e^{\|A\| + \|B\|} = e^{\|A\|} e^{\|B\|},$$

$$-$$
 $\frac{d}{dt} e^{t\|A\|} = \|A\| e^{t\|A\|}.$

Следствие Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для матричного уравнения $\dot{\|X\|} = \|A\|\|X\|$.

Теорема 4. Общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ может быть представлено в форме

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{vmatrix} = e^{t\|A\|} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — произвольные комплексные числа.

Другими словами, столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения задач Коши для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть соответствующие столбцы единичной матрицы.

Эти решения — линейно независимые и образуют базис в n -мерном линейном пространстве частных решений однородной системы линейных уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, что, очевидно, позволяет представлять общее решение данной системы уравнений как линейную комбинацию базисных решений.

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ (альтернативным следствию 1) служит формула (2). Однако ее использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей.

Более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм, основанный на следующих лемме и теореме.

Лемма 1. **Если матрица $\|D\|$ диагональна, т.е. у нее на главной диагонали стоят числа $\lambda_k \forall k = [1, n]$, а остальные элементы нули, то**

$$e^{\|D\|} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5. **Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|S\|$ квадратные, порядка n , и пусть матрица $\|S\|$ имеет обратную. Тогда если $\|A\| = \|S\| \|B\| \|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|B\|} \|S\|^{-1} \quad \forall t \in T.$$

В основе альтернативного метода вычисления матричной экспоненты лежит, известная из курса линейной алгебры, теорема о том, что если в U^n существует базис из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, то матрица $\|D\|$, определяемая формулой

$$\|D\| = \|S\|^{-1} \|A\| \|S\|,$$

диагональна (здесь $\|S\|$ — матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов).

Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 1), используя теорему 5, можно найти искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|D\|} \|S\|^{-1}.$$

В случае, когда базиса из собственных векторов матрицы $\|A\|$ нет, всегда возможно, согласно теореме Жордана, перейти к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$.

То есть, иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых клеток вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Заметим, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя суммы какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \quad \text{где}$$

$$\|J_l(0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$, очевидно, коммутируют, поэтому (согласно теореме 3):

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\|+t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|}.$$

где первый сомножитель $e^{t\lambda\|E\|}$ легко вычисляется при помощи леммы 1.

Второй найдем при помощи формулы (2):

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k . \quad (5)$$

Заметим, что, согласно правилу умножения матриц, матраца $\|J_l(0)\|$ является *нуль-потенциной*, то есть для нее $\|J_l(0)\|^l = \|O\|$. Поэтому при $k = l$ ряд (5) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых.

В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k = \\ = \begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \frac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Вычислив (если это окажется необходимым) аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвратившись в исходный базис по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1},$$

получим искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.

Проиллюстрируем изложенную теорию следующим примером.

Задача Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Решим задачу двумя способами.

В первом способе воспользуемся следствием 1. При этом нам нужно решить, указанные в следствии задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Линейное преобразование, заданное матрицей $\|A\|$ имеет двукратное собственное значение $\lambda_{1,2} = 2$ и соответствующее ему одномерное собственное подпространство, базисом в котором является собственный вектор $\|h_{(1)}\| = \|1 \ 1\|^T$.

Найдем присоединенный к $\|h_{(1)}\|$ вектор $\|h_{(2)}\| = \|\eta_1 \ \eta_2\|^T$, который в нашем случае определяется из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \eta_1 - \eta_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Используя известные формулы для жорданова базиса в двумерном случае, запишем общее решение системы (7) в виде

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + C_2 e^{2t} \left(t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

или в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} (t + 1) , \\ x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} t . \end{cases}$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши: первое

$$\text{из } \begin{vmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{vmatrix} x_{1(1)}(t) \\ x_{2(1)}(t) \end{vmatrix} = e^{2t} \left(t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = e^{2t} \begin{vmatrix} t+1 \\ t \end{vmatrix}.$$

Аналогично, второе

$$\text{из } \begin{vmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{vmatrix} x_{1(2)}(t) \\ x_{2(2)}(t) \end{vmatrix} = e^{2t} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = e^{2t} \begin{vmatrix} -t \\ 1-t \end{vmatrix}.$$

Наконец, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 1, составляем искомую матрицу для матричной экспоненты

$$e^{t\|A\|} = \begin{vmatrix} x_{1(1)} & x_{1(2)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} \end{vmatrix} = e^{2t} \begin{vmatrix} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{vmatrix}.$$

Во втором варианте решения задачи приведем матрицу к жордановой форме и затем воспользуемся леммой 1 и теоремой 5.

Согласно теореме Жордана, жорданов базис в рассматриваемом случае состоит из элементов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$. Значит $\|S\|$ – матрица перехода от исходного базиса к жорданову – будет иметь вид

$$\|S\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

поскольку ее столбцами служат координатные представления элементов нового базиса.

Как известно, матрица перехода невырожденная, поэтому обратная ей матрица существует и единственна:

$$\|S\|^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Переход к жордановой форме осуществляется по правилу

$$\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|,$$

что дает жорданову клетку:

$$\|J_2(2j)\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\lambda = 2$ и $l = 2$, поэтому из (6) и из $t\|J_l(\lambda)\| = \lambda t\|E\| + t\|J_l(0)\|$ следует

$$e^{t\|J_2(\lambda)\|} = e^{2t\|E\| + t\|J_2(0)\|} = e^{2t\|E\|} \cdot e^{t\|J_2(0)\|} = \\ = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{2t} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, по формуле $e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1}$ получаем

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ \text{Решение} \\ \text{получено.} \quad = e^{2t} \begin{vmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{vmatrix}.$$

Аналогичные методы применимы и в случае комплексных параметров задачи.

Задача 2. Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Решим эту задачу первым способом.

В первом способе воспользуемся следствием 1. При этом нам нужно решить, указанные в следствии задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей $\|A\|$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 3)^2 + 1 = 0.$$

Это дает $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$.

Найдем собственный вектор $\|h_{(1)}\| = \|\eta_1 \ \eta_2\|^T$ для $\lambda_1 = 3 + i$, который определяется из системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -i \eta_1 + \eta_2 = 0 \Rightarrow \|h_{(1)}\| = \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}.$$

Второй собственный вектор для $\lambda_1 = 3 - i$ очевидно будет равен

$$\|h_{(2)}\| = \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix}.$$

Поскольку собственные значения кратности 1 разные, то соответствующие им собственные векторы линейно независимые и образуют базис в U^2 .

Это позволяет записать общее решение системы в виде

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = C_1 e^{(3+i)t} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} + C_2 e^{(3-i)t} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix}$$

или в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{(3+i)t} + C_2 e^{(3-i)t}, \\ x_2(t) = iC_1 e^{(3+i)t} - iC_2 e^{(3-i)t}. \end{cases}$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши: первое из

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \implies \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \implies \\ &\implies C_1 = C_2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} x_{1(1)}(t) \\ x_{2(1)}(t) \end{array} \right\| &= \frac{1}{2} e^{(3+i)t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\| + \frac{1}{2} e^{(3-i)t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array} \right\| = \\ &= e^{3t} \left\| \begin{array}{c} \cos t \\ -\sin t \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Аналогично, второе из

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} x_{1(2)}(t) \\ x_{2(2)}(t) \end{array} \right\| &= \frac{1}{2} e^{(3+i)t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\| - \frac{1}{2} e^{(3-i)t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array} \right\| = \\ &= e^{3t} \left\| \begin{array}{c} i \sin t \\ i \cos t \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Теперь, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 1, составляем исковую матрицу для матричной экспоненты

$$e^{t\|A\|} = \begin{vmatrix} x_{1(1)} & x_{1(2)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} \end{vmatrix} = e^{3t} \begin{vmatrix} \cos t & i \sin t \\ -\sin t & i \cos t \end{vmatrix}.$$

В заключение обсуждения свойств матричной экспоненты опишем метод, позволяющий находить решения нескольких задач Коши, сформулированных для одного и того же начального $t = t_0$.

Поскольку множество всех частных решений однородной системы линейных ДУ является n -мерным линейным пространством, то ее общее решение может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{vmatrix} = \|\Phi(t)\| \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{vmatrix},$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные комплексные числа. Или же в более компактной форме:

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\| \|C\|. \quad (8)$$

При этом столбцами матрицы $\|\Phi(t)\|$ (часто называемой *фундаментальной*) являются координатные столбцы базисных частных решений исходной системы. Примером такой матрицы, в силу равенства (3), может служить $e^{t\|A\|}$.

Если в задаче Коши начальное условие имеет вид $\|x(t_0)\| = \|x_0\|$, то

$$\|x_0\| = \|\Phi(t_0)\| \|C\| \implies \|C\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} \|x_0\| .$$

Тогда решение задачи Коши (в силу (8)) в базисе с $\|\Phi(t)\|$ будет иметь вид

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\| \|\Phi(t_0)\|^{-1} \|x_0\| \quad (9)$$

Пусть $\|Q\|$ – невырожденная матрица, связывающая в пространстве частных решений базисы, имеющие фундаментальные матрицы $\|\Phi(t)\|$ и $e^{t\|A\|}$, такая, что выполнены равенства

$$e^{t\|A\|} = \|\Phi(t)\| \|Q\| \quad \text{и} \quad e^{t_0\|A\|} = \|\Phi(t_0)\| \|Q\| .$$

Тогда $\|Q\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} e^{t_0 \|A\|}$ и, значит, в базисе с любой фундаментальной матрицей $\|\Phi(t)\|$

$$\|\Phi(t)\| \|\Phi(t_0)\|^{-1} = e^{(t-t_0)\|A\|}. \quad (10)$$

Наконец, подставив (10) в (9), получим более удобный для практического использования, чем формула (9), вид решения задачи Коши

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|A\|} \|x_0\|. \quad (11)$$

Эффект использования формулы (11) демонстрирует

Задача Для системы уравнений

3

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$$

найти вещественные решения задач Коши со следующими начальными условиями

$$\left\| x_{(1)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$\left\| x_{(2)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \end{vmatrix};$$

$$\left\| x_{(3)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, а собственные векторы

$$\|f_{(1,2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\| \pm i \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\|.$$

Тогда общее вещественное решение решаемой системы будет

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left(C_1 \left\| \begin{array}{c} 3 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{array} \right\| + C_2 \left\| \begin{array}{c} \cos t + 3 \sin t \\ 2 \sin t \end{array} \right\| \right)$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3 \cos t - \sin t & \cos t + 3 \sin t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\|.$$

Значит, в нашем случае

$$\Phi(t) = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3 \cos t - \sin t & \cos t + 3 \sin t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{array} \right\|.$$

Матричную экспоненту при $t_0 = \frac{\pi}{4}$ найдем при помощи формулы (9). Имеем

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \exp\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Откуда находим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда, согласно (9),

$$\exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \|A\|\right) = \|\Phi(t)\| \left\| \Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} 3 \cos t - \sin t & \cos t + 3 \sin t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} -2 \cos t + 4 \sin t & 5 \cos t - 5 \sin t \\ -2 \cos t + 2 \sin t & 4 \cos t - 2 \sin t \end{array} \right\|.
 \end{aligned}$$

Наконец, по формуле (11) выписываем решения задачи Коши единообразно для всех трех случаев:

$$\begin{aligned}
 \left\| \begin{array}{c} x_{(1)1}(t) \\ x_{(1)2}(t) \end{array} \right\| &= \exp \left(\left(t - \frac{\pi}{4} \right) \|A\| \right) \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 3 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{array} \right\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_{(2)1}(t) \\ x_{(2)2}(t) \end{vmatrix} = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 10 \sin t \\ -2 \cos t + 6 \sin t \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_{(3)1}(t) \\ x_{(3)2}(t) \end{vmatrix} = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 5 \cos t - 5 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{vmatrix}.$$

Решение
получено.