Нормальные линейные системы с переменными коэффициентами

Определение 1.

Нормальной линейной системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) & = a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) & = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in \Omega$ – вещественный аргумент, комплекснозначные $x_k(t)$, $k = [1, n]$ – неизвестные функции, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на Ω функции, называемые *свободными членами*. Комплекснозначные функции $a_{ij}(t)$ заданы и непрерывны на Ω $\forall i, j = [1, n]$.

Пусть

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{array} \right\|,$$

$$\|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\|, \quad \|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{array} \right\| ,$$

тогда систему уравнений (1) можно записать в так называемом *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + b_i(t) \; \forall i = [1, n] ,$$

или же, в еще более компактной, матричной форме

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\| \|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\| . \qquad (2)$$

Справедлива

Теорема 1. **Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами есть сумма** *любого частного* **решения этой неоднородной системы и** *общего* **решения соответствующей однородной системы.**

Введем теперь понятия линейной зависимости и линейной независимости для вектор-функций.

Определение 2.	Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно зависимыми* на множестве Ω, если существуют, не равные нулю одновременно, числа λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_m$ такие, что $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega. \qquad (3)$$ Вектор-функции $\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)$ называются *линейно независимыми* на множестве Ω, если из условия $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_{(i)}(t) = \vec{o} \quad \forall t \in \Omega$$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Следует обратить внимание на то, что понятие линейной зависимости вектор-функций $\{\,\vec{x}_{(1)}(t),\, \vec{x}_{(2)}(t),\, \ldots,\, \vec{x}_{(m)}(t)\,\}$ на некотором множестве $t \in \Omega$ отличается от понятия линейной зависимости векторов, используемого в линейной алгебре.

Задача 1. Будут ли линейно зависимыми на R вектор-функции

$$\|\vec{x}_{(1)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|\vec{x}_{(2)}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\| ?$$

Решение. Алгебраические векторы $\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\|$ очевидно линейно зависимы при любом фиксированном $t \in (-\infty, +\infty)$, поскольку $t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\|$.

Однако как вектор-функции они линейно независимы, поскольку из

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \forall t$$

(например, при $t = 1$ и $t = 2$) следует, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0\,, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\,, \end{cases}$$

Решение получено. имеющей единственное (согласно теореме Крамера) решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Полезным инструментом, позволяющем делать заключения о линейной зависимости или линейной независимости системы вектор-функций, служит определитель специального вида, называемый определителем Вронского.

Определение 3. *Детерминантом Вронского* (или *вронскианом*) набора $m-$мерных вектор-функций $\{\,\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \ldots, \vec{x}_{(m)}(t)\,\}$ называется определитель квадратной матрицы m-го порядка, столбцы которого суть координатные представления этих вектор-функций.

$$W(t) = \det \left\| \begin{array}{cccc} x_{1(1)} & x_{1(2)} & \ldots & x_{1(m)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} & \ldots & x_{2(m)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_{m(1)} & x_{m(2)} & \ldots & x_{m(m)} \end{array} \right\| . \tag{4}$$

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка вида

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\acute{y}(t) + a_0(t)y(t) = b(t)\,, \tag{5}$$

где $a_k(t)$ и $b(t)$ непрерывны $\forall k = [0, n]$ $\forall t \in \Omega$ и $a_n(t) \neq 0$ $\forall t \in \Omega\,.$

Оно всегда может быть сведено при помощи следующей замены переменных:

$$x_1(t) = y(t)\,, \quad x_2(t) = \dot{y}(t)\,, \quad x_3(t) = \ddot{y}(t)\;, \quad \ldots$$

$$\ldots\;, \quad x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t)\;, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \tag{6}$$

к равносильной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \acute{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ \acute{x}_2(t) = x_3(t)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \acute{x}_{n-1}(t) = x_n(t)\,, \\ \acute{x}_n(t) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k-1}(t)}{a_n(t)} x_k(t) + \dfrac{b(t)}{a_n(t)}\,. \end{cases} \tag{7}$$

Или в матричном виде

$$\|\acute{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\| \ ,$$

где

$$\|A(t)\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_1(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_2(t)}{a_n(t)} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{array} \right\| ,$$

$$\|\vec{b}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t)/a_n(t) \end{array} \right\| \quad , \quad \|\vec{x}(t)\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} y(t) \\ \acute{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| .$$

Формулы (6) и (7) позволяют делать заключения о свойствах уравнений вида (5) и их решений, используя результаты, полученные для систем линейных уравнений.

Рассмотрим однородное линейное уравнение n-го порядка вида

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)\acute{y}(t)+a_0(t)y(t)=0\,, \qquad (8)$$

Вид общего решения однородного уравнений (5) и (8) описывает

Теорема 2. **Пусть функции $y_{(1)}(t)$, $y_{(2)}(t)$, ... , $y_{(n)}(t)$ суть линейно независимые частные решения однородного уравнения (8). Тогда общее решение этого уравнения дается формулой**

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k\, y_{(k)}(t)\,,$$

где C_1, C_2, ... , C_n – произвольные постоянные.

Определение 4.	*Фундаментальной системой решений* уравнения (8) называется совокупность любых n его линейно независимых частных решений.

Учитывая замену переменных (6), для уравнения (5) можно дать

Определение 5.	*Вронскианом* набора $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_{(1)}(t)$, $y_{(2)}(t)$, $\ldots$, $y_{(n)}(t)$ называется $$\det \left\| \begin{array}{cccc} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \ldots & y_{(n)}(t) \\ \acute{y}_{(1)}(t) & \acute{y}_{(2)}(t) & \ldots & \acute{y}_{(n)}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(t) & y_{(2)}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| ,$$ обозначаемый, как и раньше, $W(t)$.

Перечислим теперь свойства решений однородного уравнения (8), описываемые с помощью понятия вронскиана.

Теорема 3. **Пусть функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ определены и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы $\forall t \in \Omega$ и $W(t)$ – их вронскиан. Тогда**

1°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ линейно зависимы на Ω, то $W(t) \equiv 0$ на Ω.

2°. Если вронскиан $W(t) \not\equiv 0$ на Ω, то функции $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ линейно независимы на Ω.

3°. Пусть $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ суть *частные решения* **однородного уравнения (8).**

Они *линейно зависимы* **тогда и только тогда, когда и их вронскиан тождественно равен нулю, то есть $W(t) \equiv 0$ на Ω.**

Для их *линейной независимости* **необходимо и достаточно, чтобы $W(t) \not\equiv 0$ на Ω, т. е. $\exists t_0 \in \Omega : W(t_0) \neq 0$.**

4°. Если $y_{(1)}(t), y_{(2)}(t), \ldots , y_{(n)}(t)$ частные решения однородного уравнения (5.3.4), то $\forall\ t_0, t \in \Omega$ справедлива формула Лиувилля–Остроградского

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)} du \right) .$$

Заметим, что утверждения, обратные к 1° и 2°, не верны.

Как и в случае неоднородной системы (1), частное решение неоднородного уравнения (5) может быть найдено методом *вариации постоянных.*

Теорема 4. **Пусть частные решения однородного уравнения (5.3.4)** $\{y_{(1)}(t),\, y_{(2)}(t),\, \ldots\, ,\, y_{(n)}(t)\}$ **образуют фундаментальную систему, тогда неоднородное уравнение (5) имеет частное решение вида**

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, y_{(k)}(t)\,, \tag{9}$$

где непрерывно дифференцируемые функции $C_k(t),\ k = [1, n]$ **определяются как квадратуры решений системы линейных уравнений**

$$\left\| \begin{matrix} y_{(1)}(t) & y_{(2)}(t) & \ldots & y_{(n)}(t) \\ \acute{y}_{(1)}(t) & \acute{y}_{(2)}(t) & \ldots & \acute{y}_{(n)}(t) \\ \ddot{y}_{(1)}(t) & \ddot{y}_{(2)}(t) & \ldots & \ddot{y}_{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)}_{(1)}(t) & y^{(n-1)}_{(2)}(t) & \ldots & y^{(n-1)}_{(n)}(t) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \acute{C}_1(t) \\ \acute{C}_2(t) \\ \acute{C}_3(t) \\ \ldots \\ \acute{C}_n(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \dfrac{b(t)}{a_n(t)} \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

Проиллюстрируем применение изложенного метода примерами.

Задача 2. Исследовать на линейную зависимость и линейную независимость на отрезке $[-1,1]$ системы функций

$$\begin{array}{lcccc} 1) & \{ & \cos x & ; & \sin x & \} \\ 2) & \{ & x^2 & ; & x^2 \operatorname{sgn} x & \} \end{array}$$

Решение:

1) Вронскиан для первого набора функций будет

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Поскольку он не равен тождественно нулю, то первый набор функций линейно независимый.

2) В этом случае вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \operatorname{sgn} x \\ 2x & 2x \operatorname{sgn} x \end{vmatrix} = 2x^3 \operatorname{sgn} x - 2x^3 \operatorname{sgn} x = 0\,.$$

Он равен тождественно равен нулю, но делать каких-либо выводов, исходя только из этого факта, нельзя.

Воспользуемся определением линейной независимости. Пусть в каждой точке отрезка $[-1, 1]$ верно равенство

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^2 \mathrm{sgn} x = 0\,.$$

Для $x = 1$ оно имеет вид $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, а для $x = -1$ будет $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$.

По теореме Крамера система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0\,, \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

имеет решение и притом единственное.

С другой стороны, в силу своей однородности, эта система имеет тривиальное решение. Значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и ничего другого быть не может.

Следовательно, вторая система функций линейно независимая.

Задача 3. Пусть $y_1(x) = 1, \ y_2(x) = x$ и $y_3(x) = x^2$ суть три частных решения некоторого линейного неоднородного уравнения второго порядка. Найти его общее решение.

Решение:

В силу линейности уравнения функции $y_4(x) = y_2(x) - y_1(x) = x - 1$ и $y_5(x) = y_3(x) - y_1(x) = x^2 - 1$ будут линейно независимыми частными решениями однородного уравнения, образующие для него фундаментальную систему, поскольку вронскиан этого набора функций $\{y_4(x); \ y_5(x)\}$ равен

$$W(x) = \begin{vmatrix} x - 1 & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \, .$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будет

$$y(x) = C_1(x - 1) + C_2(x^2 - 1) + 1 \, .$$

Задача 4. Составить линейное однородное уравнение (минимально возможного порядка) имеющее следующие частные решения $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = e^x$.

Решение:

Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = e^x$ будут линейно независимыми частными решениями искомого однородного уравнения, поскольку их вронскиан равен

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1) \not\equiv 0.$$

Пусть искомое уравнение имеет вид $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Тогда функции $a_0(x),\ a_1(x)$ и $a_2(x)$, в силу условия задачи должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a_2(x) + a_1(x) + a_0(x) = 0\,, \\ a_1(x) + x a_0(x) = 0\,, \\ \dfrac{Kx}{x-1} = -\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}. \end{cases}$$

Причем третье уравнение вытекает из формулы Лиувилля-Остроградского.

Действительно, если $W(x_0) = 1/K$, то логарифмируя равенство

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(u)}{a_2(u)}du\right) \quad \Longrightarrow$$

получаем (с последующим дифференцированием по x)

$$\Longrightarrow \quad Ke^x(x-1) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{a_1(u)}{a_2(u)}du\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{Kx}{x-1} = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}.$$

В итоге, решив полученную систему уравнений, мы получаем уравнение

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0\,.$$

Покажите самостоятельно, что, если бы в условии задачи отсутствовало слово *однородное*, то ее решение имело бы вид:

$$(x - e^x)y' + (e^x - 1)y = e^x(x-1)\,.$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения

$$t^2\ddot{y} - t(t+3)\dot{y} + (2t+3)y = t^4 \qquad \forall t > 0\,.$$

Решение:

Поскольку общих регулярных методов отыскания частных решений уравнений типа

$$t^2\ddot{y} - t(t+3)\dot{y} + (2t+3)y = 0 \tag{11}$$

не существует, попробуем подобрать одно из частных решений в виде алгебраического многочлена степени m, то есть в виде $y(t) = t^m + \ldots$.

Подставляя это выражение в (11), получаем

$$(-m+2)t^{m+1} + \ldots = 0$$

и, приравняв нулю коэффициент при t^{m+1}, найдем, что $m = 2$. Значит, частное решение имеет смысл искать в виде $y(t) = t^2 + p\,t + q$. Если эту формулу подставить снова в (11), то уравнение примет вид

$$t^2(p-1) + q(2t+3) = 0\,,$$

откуда следует, что $p = 1$ и $q = 0$, то есть, одно частное решение уравнения (11) найдено: $\qquad y_{(1)}(t) = t^2 + t\,.$

Поскольку найденное частное решение не равно тождественно нулю, то для отыскания $y_{(2)}(t)$ – второго частного решения уравнения (11) – можно использовать формулу Лиувилля–Остроградского, приведенную в пункте 4° теоремы 3. Запишем эту формулу в виде

$$\det \left\| \begin{array}{cc} t^2+t & y_{(2)}(t) \\ 2t+1 & \dot{y}_{(2)}(t) \end{array} \right\| = C \exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u+3}{u} du \right) ,$$

что (покажите это самостоятельно!) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y_{(2)}(t)}{t^2+t} \right) = \frac{Cte^t}{(t+1)^2} .$$

Затем, используя равенство

$$\frac{d}{dt} \frac{e^t}{t+1} = \frac{te^t}{(t+1)^2} ,$$

получаем второе частное решение $\qquad y_{(2)}(t) = te^t$.

Пара частных решений $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ образует фундаментальную систему для уравнения (11). Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1(t^2 + t) + C_2 te^t \ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные константы.

Найдем теперь частное решение исходного *неоднородного* уравнения, в виде

$$y^*(t) = C_1(t)(t^2 + t) + C_2(t)te^t \ , \tag{12}$$

то есть, используя метод вариации постоянных.

В решаемой задаче система линейных уравнений (10) записывается так

$$\left\| \begin{array}{cc} t^2+t & te^t \\ 2t+1 & (t+1)e^t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ t^2 \end{array} \right\|$$

Ее решениями являются функции $\dot{C}_1(t) = -1$ и $\dot{C}_2(t) = (t+1)e^{-t}$. Соответственно, $C_1(t) = -t$ и $C_2(t) = -(t+2)e^{-t}$.

Теперь находим частное решение неоднородного уравнения по формуле (12)

$$y^*(t) = -t^3 - 2(t^2+t)\,,$$

что позволяет записать общее решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y(t) = C_1(t^2+t) + C_2te^t - t^3\,,$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные константы.