

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ и n -мерная вектор-функция $\vec{x}(t)$, где $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Тогда *полная* производная функция от скалярной функции $\Phi(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (1)$$

Пусть независимых переменных больше, чем одна, тогда

$$\Phi(\vec{t}) = F[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k), t_1, t_2, \dots, t_k]$$

И справедлива формула, обобщающая (1). Чтобы эту производную не путать с *частной* производной, обычно пишут так

$$\Phi'_{t_p} = \frac{\partial\Phi}{\partial t_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt_p} \quad \forall p \in [1, k]. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) применимы в самом простом случае, когда формульное представление функций $F(\dots)$ и $\vec{x}(\dots)$ известно. Однако часто оказывается, что эти функции заданы *неявно*: скажем, как решения некоторых других задач.

Пусть требуется найти все частные производные для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, значения которых для конкретной пары аргументов x и y находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = 0, \\ G(u, v, x, y) = 0 \end{cases} \text{ или, более точно, } \begin{cases} F(u(x, y), v(x, y), x, y) = 0, \\ G(u(x, y), v(x, y), x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Применив формулу (2), т.е. продифференцировав последовательно по x и y каждое из уравнений системы (3), получим две системы уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{array} \right., \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Предположим, что при фиксированных x и y величины $u, v, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial G}{\partial y}$ существуют.

Тогда системы уравнений (4) будут линейными относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Заметим также, что, несмотря на линейность и совпадения вида основных матриц в системах (4), наибольшее затруднение представляет не их решение, а их составление, которое требует предварительного решения нелинейной системы (3).

Напомним, наконец, что условие локального существования и дифференцируемости функций, заданных неявно, дает теорема *о системе неявно заданных функций*.

Проиллюстрируем использование формул (1) ... (4) следующими примерами.

Пример 1. Найти частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных неявно

$$\text{системой уравнений } \begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{v+1} = 2x, \end{cases} \text{ в точке } \{1; 2\} \text{ для которой выпол-} \\ \text{нены равенства } u(1, 2) = v(1, 2) = 0. \quad (5)$$

Решение: В данной задаче для системы (3) имеем

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = xe^{u+v} + 2uv - 1, \\ G(u, v, x, y) = ye^{u-v} - \frac{u}{v+1} - 2x. \end{cases}$$

Решать систему (3) здесь не нужно, ибо легко проверяется, что верны равенства $F(0, 0, 1, 2) = 0$ и $G(0, 0, 1, 2) = 0$.

Поэтому в точке $\{1; 2\}$ в силу (5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= xe^{u+v} + 2v = 1e^0 + 0 = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= xe^{u+v} + 2u = 1e^0 + 0 = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= e^{u+v} = 1e^0 = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u} &= ye^{u-v} - \frac{1}{v+1} = 2e^0 - \frac{1}{0+1} = 1, \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= -ye^{u-v} + \frac{u}{(v+1)^2} = -2e^0 + \frac{0}{(0+1)^2} = -2, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -2, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = e^{u-v} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

А системы (4) будут

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = -1. \end{cases}$$

Из них, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3}$, что и является решением задачи.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Пример 1. Найти $dz(x, y)$, если $z = u^3 + v^3$ $u \neq v$, а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y. \end{cases} \quad (6)$$

Решение: 1) Искомый дифференциал имеет вид $dz(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, поэтому задача сводится к нахождению двух частных производных, которые здесь могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2) Производные $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$ находятся тривиально, а для вычисления остальных четырех придется использовать системы (3) и (4).

Нелинейная система (3) вида

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = u + v - x = 0, \\ G(u, v, x, y) = u^2 + v^2 - y = 0, \end{cases}$$

несложно решается "школьными" методами, но тут удобнее составить две линейные системы (4). Проверьте самостоятельно, что они имеют следующий вид и решения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \end{cases}.$$

3) Таким образом, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).\end{aligned}$$

4) Заметим, что из (6) следует, что $u+v=x$ и $uv = \frac{x^2-y}{2}$, что позволяет

искомые производные записать как функции от x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}(x^2 - y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x.$$

Поэтому окончательно получаем, что $dz(x, y) = \frac{3}{2}(y - x^2)dx + \frac{3}{2}x dy$.

5) К полученному ответу следует добавить условие, гарантирующее разрешимость системы (6). Это условие можно получить разными способами: из геометрической интерпретации системы (6) в прямоугольной системе координат Ouv или из следующих соотношений:

$$0 \leq (u - v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv = y - 2 \frac{x^2 - y}{2} = 2y - x^2,$$

что с учетом $u \neq v$ дает $y > \frac{x^2}{2}$.

Возникает естественный вопрос: можно ли за счет выбора специальной системы координат (не обязательно декартовой) упростить вид дифференциального уравнения?

Пример 2. Найти все функции $u(x, y)$, удовлетворяющие во внутренности правой декартовой координатной полуплоскости, уравнению вида $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$. (7)

Решение: 1) Преобразуем уравнение (7), перейдя в полярную систему координат, то есть, сделав замену переменных $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$, обратная к которой $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$. Заметим, что данные формулы корректны, поскольку по условию $x > 0$.

2) Формулы, выражающие декартовы переменные через полярные (и наоборот) у нас есть. Нужно получить в полярных координатах формулы для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Имеем по правилу (2) дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Составим системы (4) с $F(r, \varphi, x, y) = r \cos \varphi - x$ и $G(r, \varphi, x, y) = r \sin \varphi - y$ для производных по x и y и решим их:

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + r(-\sin \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \\ \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + r(-\sin \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial y} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi \end{cases}.$$

3) Подставляем найденные выражения в полярных координатах в левую часть уравнения (7), получаем

$$\begin{aligned}x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= r \cos \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) \right] + r \sin \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right] = \\ &= r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial r} + (-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

4) В итоге исходное уравнение, учетом условия $x > 0$, будет равносильно уравнению $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$, которое проще исходного.

Решение данного уравнения означает, что мы должны найти все непрерывно дифференцируемые функции $u(r, \varphi)$, частная производная от которых по r равна $\frac{1}{r}$.

Исходя из известных правил дифференцирования, можно заключить, что $u(r, \varphi) = \ln r + C(\varphi)$, где $C(\varphi)$, есть непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента φ .

5) Решение исходной задачи получаем, сделав обратный переход к переменным: $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})$, а, учитывая условие $x > 0$ и непрерывность суперпозиции непрерывных функций, эту формулу можно записать в виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + D\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $D(s)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.