ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ЭКСТРЕМУМ

В начале рассмотрим случай поиска локального минимума функции *двух* переменных, поскольку уже для $n = 2$ все существенные отличия от одномерной задачи можно легко продемонстрировать.

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x, y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| \in \Omega$ локальный минимум. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ *строгий локальный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколотая окрестность, такая, что для *любой* точки $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$f(x, y) > f(x^*, y^*) . \tag{1}$$

Понятно, что проверить выполнение условия определения 1 для всех точек окрестности $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}$ невозможно. Поэтому необходимо получить условия существования экстремума, проверка которых практически реализуема.

В некоторых случаях, удается преобразовать запись функции $f(x,y)$ к виду, в котором выполнение неравенства (1) очевидно или легко проверяется. Например, функцию $f(x,y)=x^4-x^2y+y^2$ можно записать так:

$$f(x,y)=x^4-x^2y+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=\left(x^2-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Откуда следует, что точка $\left\|\begin{matrix}x^*\\y^*\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\|$ есть точка локального минимума. Впрочем, подобная ситуация есть исключение, а не правило.

Более удобным способом использования определения 1 является оценка знака разности $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ для точек окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ при помощи *формулы Тейлора.*

Формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ в точке $\left\|\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\|$, как известно, можно записать в виде

$$f(x,y)=f(x^*,y^*)+d\,f+\frac{1}{2}d^2 f+o(\rho^2)\,, \tag{2}$$

где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$, $dx=x-x^*$ и $dy=y-y^*$, а дифференциалы $d\,f$ и $d^2 f$ соответственно равны

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\,, \qquad d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

В двух последних формулах частные производные вычислены в точке $\left\|\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\|$.

Из (2) получаем, что

$$f(x,y)-f(x^*,y^*)=d\,f+\frac{1}{2}d^2f+o(\rho^2)\,, \tag{3}$$

Здесь отметим, что, согласно теореме Тейлора (об остаточном члене в форе Пеано) первое слагаемое в правой части (3) в силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(x,y)$, имеет порядок малости $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Второе слагаемое в правой части - порядок малости $\rho^2=dx^2+dy^2$.

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки $\left\|\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\|$ знак приращения $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ определяется знаком величины $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$, который может быть *любым* в силу линейной зависимости df от dx и dy .

Иначе говоря, если $\operatorname{grad} f(x,y) \neq o$ и для некоторого вектора $\left\| \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix} \right\|$ мы имеем $f(x,y) - f(x^*, y^*) > 0,$ то для вектора $(-\left\| \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix} \right\|)$ мы обязательно будем иметь, что $f(x,y) - f(x^*, y^*) < 0,$ так как производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ от значений dx и dy не зависят. Значит, у непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точках, где $\operatorname{grad} f(x,y) \neq o$, экстремума (т.е. минимума или максимума) быть не может. Заметим, что точки, в которых $\operatorname{grad} f(x,y) = o$, принято называть *стационарными точками* для функции $f(x,y)$.

В итоге мы приходим к следующему *необходимому* условию существования экстремума:

Если непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$ **имеет экстремум в точке** $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$**, то** $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = o$**.**

Это необходимое условие не является достаточным. Пример: $f(x,y) = xy$. Здесь в начале координат градиент есть нулевой вектор, а экстремума нет.

Пусть теперь мы рассматриваем только точки, в которых $\operatorname{grad} f(x,y) = o$. В этом случае знак разности $f(x,y) - f(x^*,y^*)$ будет совпадать со знаком второго слагаемого в правой части (3), т.е.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \tag{4}$$

В формуле (4) значения производных вычислены в фиксированной точке $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$ и не зависят от значений dx и dy . Для простоты записей будем обозначать эти значения так: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Напомним, что матрица $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$ называется *матрицей Гессе*.

Тогда можно утверждать, что знак разности $f(x,y) - f(x^*,y^*)$ совпадает со знаком квадратичной формы

$$Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2. \tag{5}$$

Если квадратичная форма $Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$. *положительно определенная*, то в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ функция $f(x, y)$ будет иметь *строгий локальный минимум*, а, если эта форма *отрицательно определена*, то - *строгий локальный минимум*. Наконец, если форма не имеет знаковой определенности(как строгой, так и нестрогой), то экстремума гарантировано нет. Оставшиеся возможные случаи будут требовать дополнительного исследования.

Итак, мы пришли к достаточным условиям вида:

> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) *положительно* определена, то $f(x, y)$ имеет в этой точке *строгий локальный минимум*.**
>
> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) *отрицательно определена*, то $f(x, y)$ имеет в этой точке *строгий локальный максимум*.**
>
> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) не имеет *знаковой определенности*, то $f(x, y)$ не имеет в этой точке *строгого локального экстремума*.**

Заметим, что, например, *первое достаточное условие не является необходимым*. Контр-пример: $f(x, y) = x^4 + y^4$. Здесь в начале координат есть строгий минимум, а строгой положительности нет.

Напомним теперь, доказываемые в курсе линейной алгебры, методы исследования квадратичной формы (5) на наличие или отсутствия знаковой неопределенности.

1) *Метод Лагранжа*. Он сводится к построению диагонального (или канонического) базиса методом выделения полных квадратов, т.е. базиса, в котором коэффициент B у квадратичной формы (5) равен нулю.

2) *Критерий Сильвестра*. Этот критерий утверждает, что для положительной опреде ленности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A > 0$ и $\det \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} > 0$.

   Для отрицательной определенности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A < 0$ и $\det \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} > 0$.

3) *Диагонализация матрицы квадратичной формы в евклидовом пространстве*. Этот метод основан на теореме о том, что в базисе из собственных векторов самосопряженного преобразования, имеющего в ОНБ матрицу вида $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$, матрица такого преобразования диагональная, причем на ее главной диагонали стоят собственные значения этого преобразования.

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: 1) Найдем вначале для бесконечно дифференцируемой функции $f(x,y)$ все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\operatorname{grad} f(x,y) = o \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \\ \\ \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \end{array} \right. .$$

2) Проверим теперь выполнение *достаточных* условий в стационарных точках. Строим матрицу Гессе $\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{Vmatrix}$.

В первой стационарной точке матрица Гессе будет $\begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}$. Для нее выполняется критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы (5). Значит в точке $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ у функции строгий локальный минимум.

Во второй стационарной точке матрица Гессе равна $\begin{Vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$. Для нее не выполняется достаточное условие знаковой определенности квадратичной формы (5). В точке $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ у экстремума нет, поскольку в малой окрестности начала координат $f(x,y) = -3dxdy + dx^3 + dy^3$ и при $dx = dy$ имеем $\Delta f = -3dx^2 + 2dx^3 < 0$, а при $dx = -dy$ имеем $\Delta f = 3dx^2 - 2dx^3 > 0$.

Пример 2. В E^2 исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y\,.$$

Решение: 1) Для бесконечно дифференцируемой функции $f(x,y)$ найдем все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\operatorname{grad} f(x,y) = o \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Откуда получаем четыре точки, подозрительные на экстремальность

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right\|.$$

2) Проверим выполнение *достаточных* условий в стационарных точках.

Матрица Гессе имеет вид $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{matrix} \right\|.$

Эта матрица симметрическая и в ОНБ может рассматриваться как матрица самосопряженного преобразования. Которая, в свою очередь, в ОНБ из собственных векторов имеет диагональный вид. Причем на главной диагонали стоят собственные значения.

Результаты применения метода приведем в следующей таблице

Стац. точка	**Матрица Гессе**	**Знаковая определенность**	**Характ. уравн. и собств. значения**	**Экстремум?**
$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{Vmatrix}$	Положительная	$(12-\lambda)^2-36=0$ $\lambda_1=6, \quad \lambda_2=18$	Строгий минимум
$\begin{Vmatrix} -1 \\ -2 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{Vmatrix}$	Отрицательная	$(-12-\lambda)^2-36=0$ $\lambda_1=-6, \quad \lambda_2=-18$	Строгий максимум
$\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{Vmatrix}$	Нет	$(6-\lambda)^2-144=0$ $\lambda_1=-6, \quad \lambda_2=18$	Нет
$\begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{Vmatrix}$	Нет	$(-6-\lambda)^2-144=0$ $\lambda_1=6, \quad \lambda_2=-18$	Нет

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума $\operatorname{grad} f(x,y) = o$ или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4x^3 + 4y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x .$$

Откуда, подставив в первое уравнение системы, получим $4x^3 - 8x = 0$. Значит, стационарных точек три: $\begin{Vmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе следующего вида $\begin{Vmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{Vmatrix}$. В первых двух стационарных точках справедливо равенство $x^2 = y^2 = 2$ и потому в этих точках матрица Гесса $\begin{Vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{Vmatrix}$. Следовательно, в первых двух точках мы имеем строгие локальные минимумы.

В третьей стационарной точке - в начале координат - матрица Гессе равна $\begin{Vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{Vmatrix}$ и квадратичная форма (5) является отрицательно полуопределенной. Значит, ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

Воспользуемся тем, что изменение значения исследуемой функции в начале координат определяется следующей формулой:

$$\Delta f(x,y) = dx^4 + dy^4 - 2(dx-dy)^2 .$$

В этом случае, выходя из начала координат по направлению $dx = dy$, мы получим, что $\Delta f(x,y) > 0$, а выходя по направлению $dx = -dy$, будем иметь $\Delta f(x,y) = 2dx^4 - 8dx^2 < 0$ при достаточно малых $|dx|$. Это означает, что начало координат не является экстремальной точкой для исследуемой функции .

Пример 4. В E^2 исследовать на экстремум $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума $\operatorname{grad} f(x,y) = o$ или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y + 4 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 1 = 0 .$$

Множество стационарных точек неограниченно и есть прямая в E^2.

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе, одинаковую для всех стационарных точек $\begin{Vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}$. Значит, в каждой стационарной точке квадратичная форма (5) является положительно полуопределенной и ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

В этой ситуации можно воспользоваться тем, что исследуемая функция может быть записана так:

$$f(x,y) = (2x - y)^2 + 2(2x - y) + 1 = (2x - y + 1)^2 .$$

Откуда следует, что каждая точка прямой $2x - y + 1 = 0$ является точкой минимума функции $f(x,y)$, но нестрогого, поскольку в любой ее окрестности имеются другие точки с тем же значением $f(x,y)$.

Пример 5. В E^2 исследовать на экстремум $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума утверждает, что либо $\operatorname{grad} f(x,y)=o$, либо он не существует.

Нетрудно видеть, что в любой точке, кроме начала координат, вектор $\operatorname{grad} f(x,y)$ имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{matrix}\right\| . \qquad (6)$$

Среди таких точек стационарных нет, поскольку длина вектора градиента для них равна единице.

Остается рассмотреть точку начало координат. в ней вектор градиента не существует, поскольку не существую пределы, являющиеся частными производными по x и y. Действительно, из курса математического анализа известно, что пределы вида

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(0+dx,0)-f(0,0)}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{-\sqrt{dx^2}}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{-|dx|}{dx}$$

и

$$\lim_{dy\to 0}\frac{f(0,0+dy)-f(0,0)}{dy}=\lim_{dy\to 0}\frac{-\sqrt{dy^2}}{dy}=\lim_{dy\to 0}\frac{-|dy|}{dy}$$

не существуют. Заметим, что использование формул (6) для обоснования недифференцируемости исследуемой функции в начале координат, является неверным.

Поскольку применение критериев экстремума с данной задаче невозможно, воспользуемся непосредственно определением. Имеем следующую оценку знака изменения значения исследуемой функции при произвольном отклонении аргументов от начала координат:

$$f(0+dx,0+dy)-f(0,0)=1-\sqrt{dx^2+dy^2}-1=-\sqrt{dx^2+dy^2}<0\quad\forall dx,dy,$$

из которой следует, что начало координат является точкой строго максимума.

Пример 6. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x,y)$, заданную *неявно* условием $F(x,y,u)=1-x^2-y^2-u^2=0$. (7)

Решение: 1) Найдем производные функции $u(x,y)$, заданной неявно: имеем $u'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_u}$, $u'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_u}$, где

$$F'_x=-2x,\ F'_y=-2y,\ F'_u=-2u.$$

Тогда, в силу необходимых условий экстремальности

из $\begin{cases} u'_x=-\dfrac{x}{u}=0 \\ u'_y=-\dfrac{y}{u}=0 \end{cases}$ следует, что точка $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ подозрительная на экстремум.

2) Для применения достаточных условий найдем матрицу Гессе в подозрительной точке, получим

$$\left\|\begin{matrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -\dfrac{1}{u}+x\dfrac{u'_x}{u^2} & x\dfrac{u'_y}{u^2} \\ y\dfrac{u'_x}{u^2} & -\dfrac{1}{u}+y\dfrac{u'_y}{u^2} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -\dfrac{1}{u} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{u} \end{matrix}\right\| . \qquad (8)$$

С другой стороны из (7) имеем, что в точке $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ переменная $u=\pm 1$, то есть уравнение (7) в окрестности этой точки задает две различные функции.

Используя достаточные условия экстремума, из (8) получаем, что у одной из этих функций с $u=-1$ имеем минимум, а при $u=1$ - максимум.

К данному заключению можно было также придти, заметив, что в окрестности точки $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ из уравнения (7) следует, что либо $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$, либо $u=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Пример 7. Пусть непрерывная функция $F(x)$ имеет в точке x^* локальный экстремум. Верно ли утверждение: в этом случае найдется такая окрестность точки x^*, для которой $F(x)$ монотонна как в правой, так и в левой полуокрестности этой точки? Ответ обосновать.

Решение: Нет, неверно. Пример: непрерывная функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x = 0, \\ x^2 (2 + \cos\dfrac{1}{x}), \quad \text{если } x \neq 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x^* = 0$ минимум, но не является монотонной в любой полуокрестности этой точки.