ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x,y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| \in \Omega$ локальный минимум при условии $g(x,y)=0$. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ *условный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколотая окрестность, такая, что для *любой* точки $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ имеет место

$$g(x,y)=0$$

и выполнено неравенство

$$f(x,y) > f(x^*,y^*). \tag{1}$$

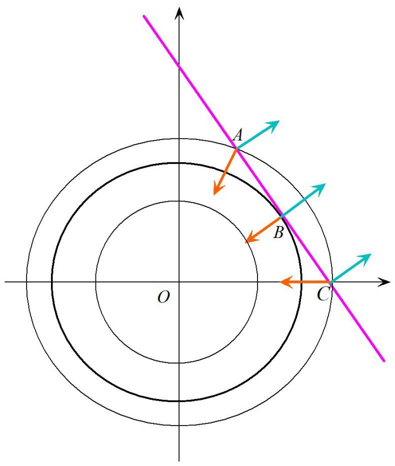
Сначала в качестве примера рассмотрим конкретную задачу:

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=-x^2-y^2$ при условии $g(x,y)=x+y-1=0$.

Решение: 1) Очевидно, что эту задачу можно решить методом исключения, выразив y из условия связи через x и подставив $y=1-x$ в целевую функцию, приходим к задаче минимизации функции $\Phi(x)=-x^2-(1-x)^2$ без ограничений, решение которой $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$ и $f=-\frac{1}{2}$.

Функция Лагранжа и пее использование

Рассмотрим вначале геометрическую интерпретацию задачи, получив необходимые условия ее решения.
\



На данном рисунке черным цветом показаны изолинии целевой функции

$$f(x,y) = -x^2 - y^2\,,$$

фиолетовым цветом - точки прямой

$$g(x,y) = 3x + 2y - 12 = 0\,.$$

Оранжевым цветом показаны векторы градиента целевой функции $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\|$. Наконец, голубым цветом - векторы градиента функции ограничения $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{matrix}\right\|$.

Очевидно, что *необходимое* условие экстремума заключается в коллинеарности векторов $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{matrix}\right\|$ на множестве точек

$$g(x,y)=3x+2y-12=0\,.$$

Иначе говоря, $\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{matrix}\right\|=-\lambda\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}\end{matrix}\right\|$, где λ -некоторая константа.

Откуда, в силу свойства линейности операции дифференцирования, следует, что существует функция

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y),$$

в терминах которой необходимое условие существования условного экстремума в данной задаче принимает вид:

$$\begin{cases} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче $L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(x+y-1)$.
Значит необходимые условия экстремума принимают вид

$$\begin{cases} -2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Очевидным решением этой системы является тройка чисел $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = 1$.

Сделаем обобщение данного подхода

для задачи:

исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (2)
при условиях: $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]$.

при этом будем считать, что

$$m < n \quad \text{и} \quad \mathrm{rg}\left\| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)} \right\| = m\,.$$

Функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad i = [1, m]$ непрерывно дифференцируемые.

Введем в рассмотрение функцию (называемую далее *функцией Лагранжа*) вида:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда необходимые условия экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m].$$

имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = [1, n] \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют (3). Тогда *достаточное* условие экстремума будет иметь формулировку

> Если квадратичная форма $d_x^2 L$ положительно (отрицательно) определена при условии $dg_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]$, то задача (3) в точке $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ имеет локальный минимум (максимум).

Пример 2. В E^3 исследовать на экстремум функцию $u(x,y,z)=x-y+2z$ при условии $x^2+y^2+2z^2=16$.

Решение: 1) Функция Лагранжа для этой задачи будет

$$L=x-y+2z+\lambda(x^2+y^2+2z^2-16)\,.$$

Условия ее стационарности вместе с уравнением связи образуют систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-1+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2+4\lambda z=0 \\ x^2+y^2+2z^2=16 \end{cases}$$

Если из первых трех уравнений выразить $x = -\frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{2\lambda}, z = -\frac{1}{2\lambda}$ и подставить в четвертое, то получим из $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} = 16$, что $\lambda = \pm\frac{1}{4}$.

2) Получаем две стационарные точки, подозрительные на экстремум:

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

3) Проверяем достаточные условия. Находим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 4\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0$$

Откуда $d^2 L = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2 + 4\lambda(dz)^2$. Эта квадратичная форма положительно определена при $\lambda = \frac{1}{4}$ и отрицательно определена при $\lambda = -\frac{1}{4}$. Кроме того, должно выполняться равенство $2xdx + 2ydy + 4zdz = 0$. Однако, последнее равенство на знаковую определенность $d^2 L$ не повлияет и может быть проигнорировано. Итак

$\lambda = \frac{1}{4}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$ точка минимума и $\lambda = -\frac{1}{4}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ .....точка максимума.

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: 1) Функция Лагранжа в этой задаче

$$L = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2) Условия ее стационарности будут

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2y + 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (2+2\lambda)x + y = 0 \\ x + (2+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

2) Имеем, что, если с, то $x = y = 0$, а это очевидно не решение. Если же $\det\begin{Vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$, то возможны два случая.

3) $\lambda = -\frac{1}{2}$, при этом $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array} \right.$.

Матрица Гессе будет иметь вид $\left\| \begin{matrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$. Она положительно полуопределена и тут требуется дополнительное исследование.

Здесь $d^2L = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx + dy)^2$, при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$. А поскольку в этих точках $x + y = 0$, то $dx = dy$. Значит, $d^2L = 4(dx)^2$ и это *минимумы*.

4) $\lambda = -\dfrac{3}{2}$, при этом $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}\right.$.

Матрица Гессе будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. Она отрицательно полуопределена и тут также требуется дополнительное исследование.

Здесь $d^2L = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2$, и при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$. А поскольку в этих точках $x - y = 0$, то $dx = -dy$. Значит, $d^2L = -4(dx)^2$ и это точки *максимумов*.