

## КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### Двойные интегралы

В начале, для большей наглядности, рассмотрим двумерный случай.

Пусть дана дважды непрерывная в некоторой, измеримой по Жордану (с мерой  $\mu$ ), области  $\Omega \subseteq E^2$  с ОНБ функция  $f(x, y)$ .

И пусть для этого множества выполнено разбиение  $\{\Omega_k, k = [1, N]\}$  с мелкостью этого разбиения, определяемого некоторым функционалом  $\tau = T(\{\mu(\Omega_k), k = [1, N]\})$ .

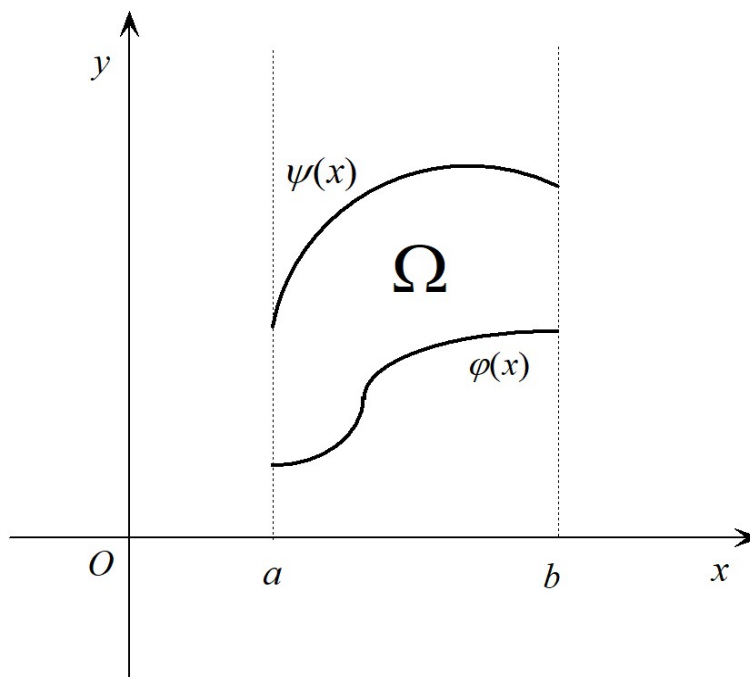
Далее, в каждом  $\Omega_k$  выбрана произвольная точка  $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ , совокупность которых обозначим  $\Theta_\tau$ .

Тогда *римановской суммой* от функции  $f(x, y)$  по области  $\Omega$  называется

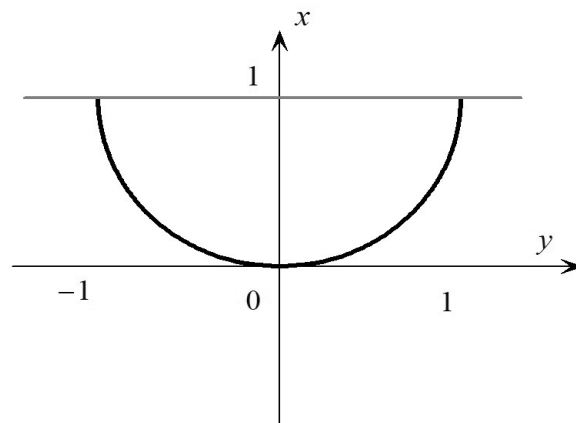
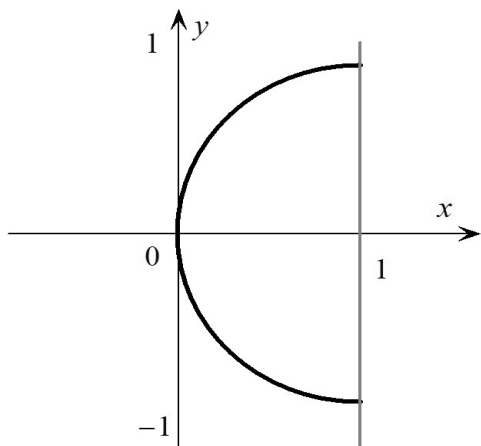
выражение вида 
$$\sigma_\tau(f; \Theta_\tau) = \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \mu(\Omega_k).$$

Двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $\Omega$  называется число  $J = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau$  - предел ее римановской суммы при мелкости разбиения  $\tau \rightarrow 0$ .

Область  $\Omega$  называется элементарной относительно оси  $Oy$ , если существуют функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$   $x \in [a, b]$ , такие, что  $\Omega = \begin{cases} \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ x \in [a, b]. \end{cases}$



Если область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Oy$ , то двойной интеграл, обозначаемый как  $J = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , равен  $J = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ .



Пример 1: Найти  $J = \iint_{\Omega} xy^2 dx dy$ , если  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ y^2 \leq x. \end{array} \right\}$

Решение: 1) Заметим, что область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Oy$  и  $\varphi(x) = -\sqrt{x}$ ,  $\psi(x) = \sqrt{x}$ . Поэтому

$$J = \iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \int_0^1 x \left( \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

2) Можно также заметить, что область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Ox$  с  $\varphi(y) = y^2$ ,  $\psi(y) = 1$ . Значит, двойной интеграл можно считать иначе

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 y^2 dy \int_{y^2}^1 x dx = \int_{-1}^1 y^2 \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^1 \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 (1 - y^4) dy = \\ &= \int_0^1 y^2 (1 - y^4) dy = \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

3) Результаты получились одинаковые. Это теорема!

Пример 2: Найдите двойной интеграл  $J = \iint_{\Omega} (x+2y) dx dy$ , если область имеет вид

$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3, \\ x \leq y \leq 2x. \end{array} \right\}$ , выбрав наиболее удобный порядок последовательного интегрирования.

Решение: 1) Заметим, что область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Oy$  с  $\varphi(x) = x, \psi(x) = 2x$ . Относительно оси  $Ox$  она не элементарна, но ее можно разбить на три части, каждая из которых элементарна относительно оси  $Ox$ . Однако придется считать три двойных интеграла по областям  $I, II, III$ . Свойство адитивности интеграла.

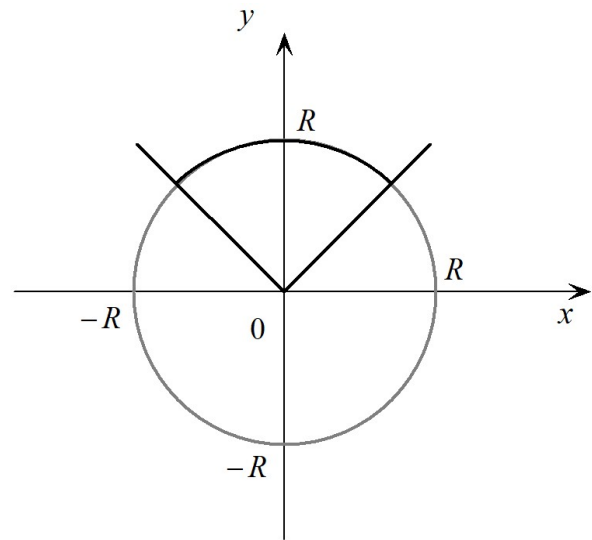
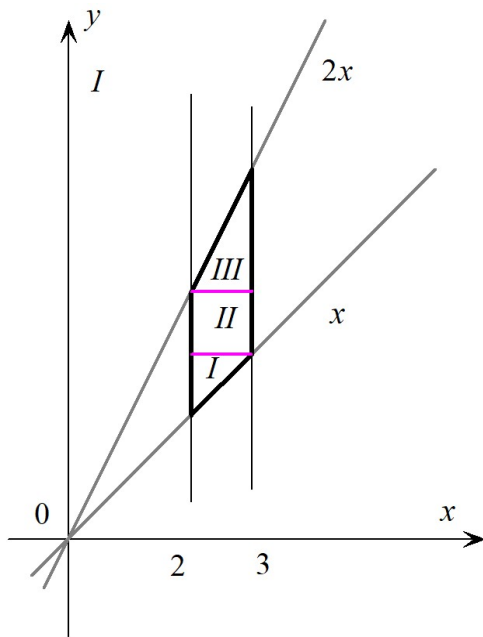
2) Поэтому лучше считать так:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega} (x+2y) dx dy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy = \int_2^3 [(xy + y^2)]_x^{2x} dx = \\ &= \int_2^3 [(2x^2 + 4x^2) - (x^2 + x^2)] dx = 4 \int_2^3 x^2 dy = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

Нередко вычисление двойных интегралов можно упростить, сделав подходящую нелинейную замену переменных.

Пример 3: Найдите двойной интеграл  $J = \iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ , если область имеет вид

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ |x| \leq y. \end{array} \right\}, \text{ перейдя в полярную систему координат.}$$



Решение: 1) Область  $\Omega$  элементарна относительно оси  $Oy$  с  $\varphi(x) = |x|$ ,  $\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , но интегралы получаются довольно сложные.

2) Существенно проще вычисления оказываются, если перейти в полярную систему координат по формулам  $\begin{cases} x = r \cos \alpha, \\ y = r \sin \alpha. \end{cases}$

При такой замене  $dx dy = r dr d\alpha$  (модуль якобиана равен  $r$ ), и задача сводится к нахождению двойного интеграла вида

$$J = \iint_{\Omega^*} (r \cos \alpha + r \sin \alpha) r dr d\alpha,$$

где область  $\Omega^*$  является *прямоугольником*  $\begin{cases} 0 \leq r \leq R, \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$  в переменных  $r$  и  $\alpha$ .

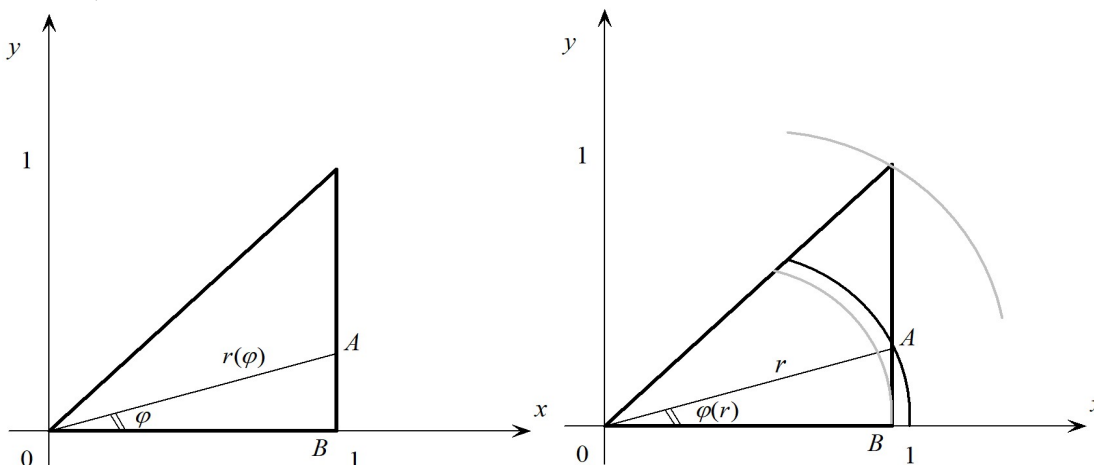
3) Поскольку интегралы по полярным координатам оказываются на прямоугольнике  $\Omega^*$  независимыми, то вычисления сильно упрощаются:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega^*} (r \cos \alpha + r \sin \alpha) r \, dr \, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \alpha + \sin \alpha) d\alpha \int_0^R r^2 \, dr = \\ &= \frac{R^3}{3} (\sin \alpha - \cos \alpha) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{R^3 \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Задача 3: в интеграле  $I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если

$$1) \quad \Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ y \geq 0, \\ x \geq y, \end{cases} \quad 2) \quad \Omega: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1. \end{cases}$$

Решение: 1)



а) Пусть  $\varphi$  - внешняя переменная, а  $r$  - внутренняя. Тогда  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$ ,  
где  $r(\varphi) = |OA|$ .

В нашем случае, из  $\triangle OAB$  следует, что  $\cos \varphi = \frac{1}{r(\varphi)}$ . Поэтому  $r(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi}$  и, окончательно,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б) Пусть  $r$  - внешняя переменная, а  $\varphi$  - внутренняя. Тогда

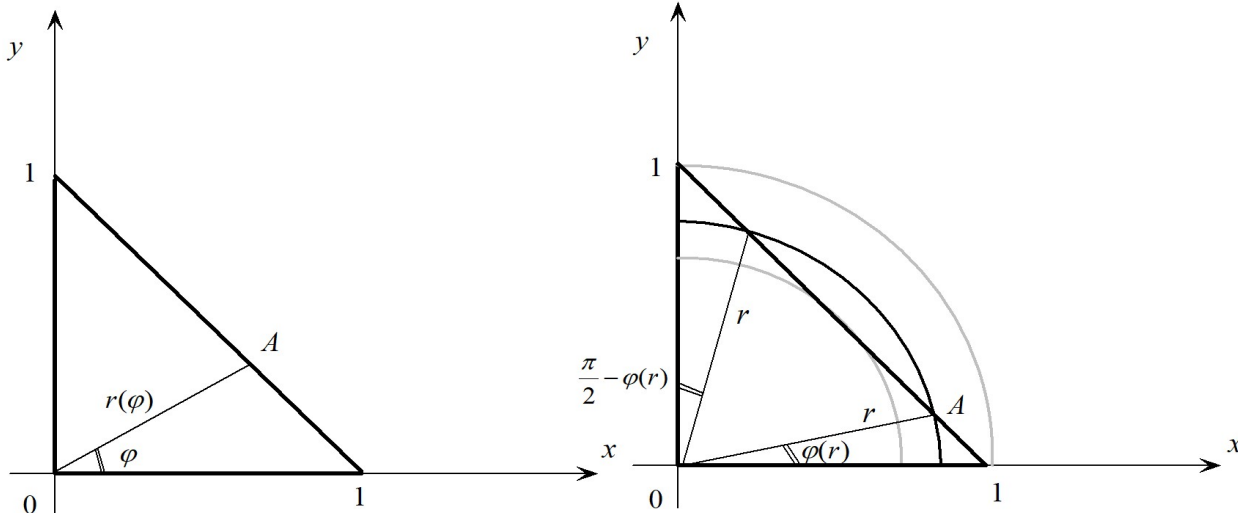
$$I = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\varphi(r)}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi,$$

где из  $\triangle OAB$  находим, что  $\cos \varphi(r) = \frac{1}{r}$  или  $\varphi(r) = \arccos \frac{1}{r}$ . Т.е.

$$I = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$



2)



\

а) Пусть  $\varphi$  - внешняя переменная, а  $r$  - внутренняя. Тогда 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr,$$
 где  $r(\varphi) = |OA|$ .

В нашем случае, из принадлежности точки  $A$  гипотенузе следует, что  $x_A + y_A = 1$  или, в полярных координатах  $r(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi = 1 \Rightarrow r(\varphi) \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Поэтому  $r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$  и, окончательно 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б) Пусть  $r$  - внешняя переменная, а  $\varphi$  - внутренняя. Тогда удобно разбить промежуток изменения  $r$  на два:  $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  и  $r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ . Тогда получим, что интеграл по всей области представим в виде

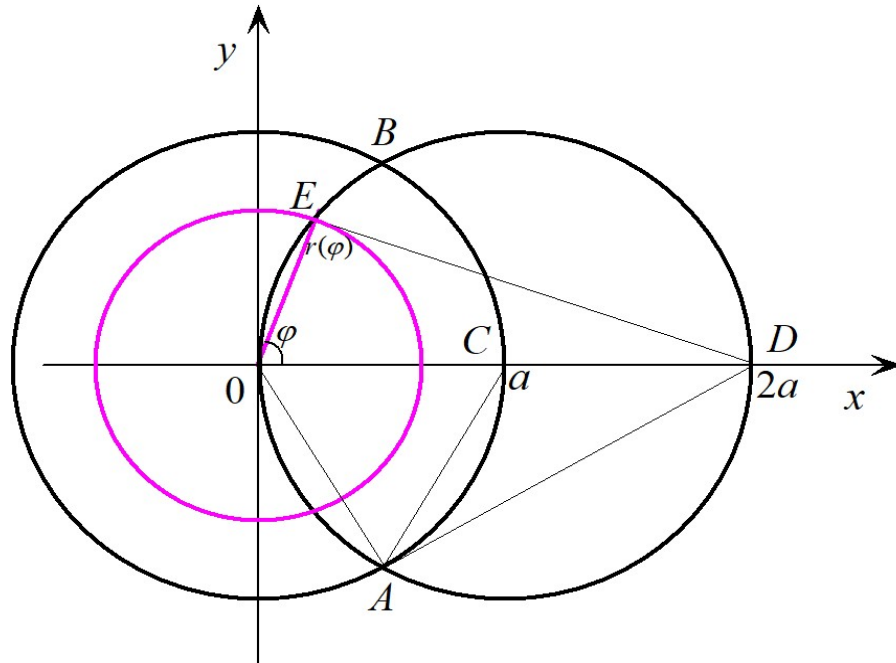
$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_0^{\varphi(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi(r)}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi,$$

где функция  $\varphi(r)$  находится из условия принадлежности точки  $A$  гипотенузе:

$$r \cos \varphi(r) + r \sin \varphi(r) = 1 \Rightarrow r(\varphi) \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\varphi(r) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}}.$$

То есть,  $\varphi(r) = \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$ .

В следующей задаче укажем лишь идею решения и ответ. Проверьте его самостоятельно.



Задача 4: В интеграле  $I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$  перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если  $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2, & a > 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2ax. \end{cases}$

Решение: 1) Заметим, что треугольник  $OAC$  правильный, а треугольник  $OED$  прямоугольный. Откуда можно получить, что  $r(\varphi) = 2a \cos \varphi$ .

2) Область в данной задаче - сдвоенный сегмент  $OBCA$ . При этом область элементарна при обеих последовательностях одномерного интегрирования, но при внешней переменной  $\varphi$  верхняя граница состоит из трех функций, а при внешней переменной  $r$  - из одной.

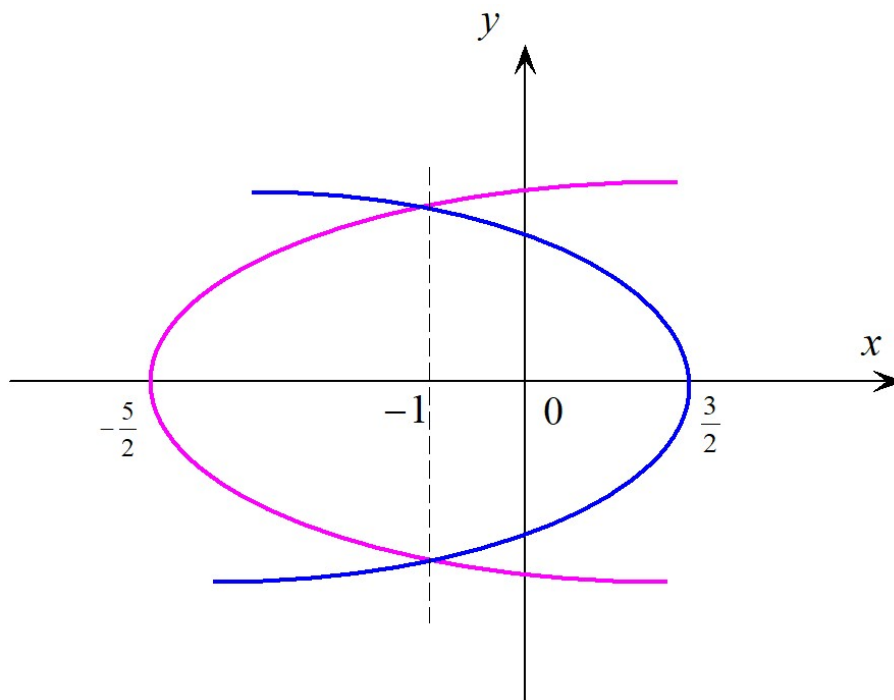
Ответ: 1) если внешняя переменная последовательного интегрирования  $\varphi$ , то

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \\ + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

2) если внешняя переменная последовательного интегрирования  $r$ , то

$$I = \int_0^a r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

Задача 5: На плоскости  $Oxy$  в прямоугольной системе координат найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9 - 6x$  и  $y^2 = 10x + 25$ .



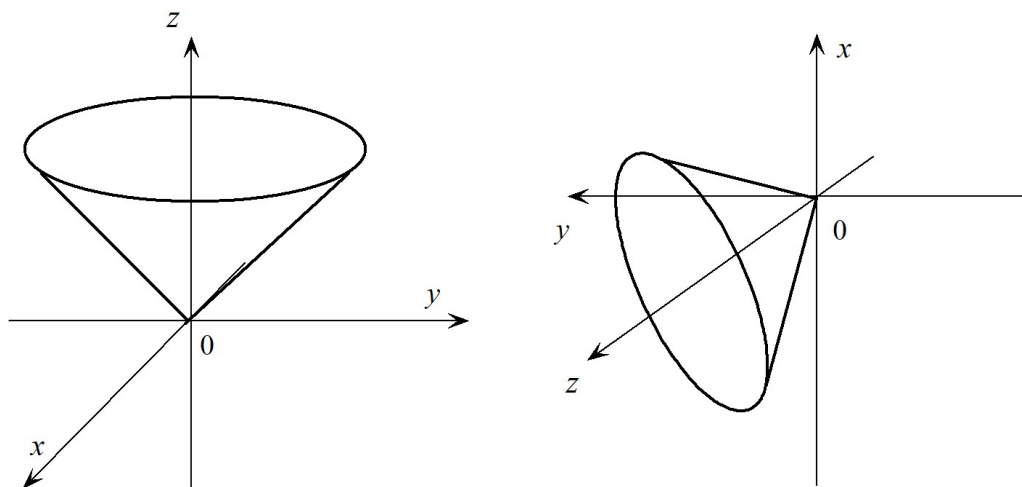
Решение: 1) Воспользуемся теоремой о том, что площадь области  $\Omega$  определяется формулой

$$S = \iint_{\Omega} dx dy. \text{ Заметим, что координаты точек пересечения парабол } \left\| \begin{matrix} -1 \\ \pm \sqrt{15} \end{matrix} \right\|.$$

2) В данном случае удобнее воспользоваться элементарностью области  $\Omega$  относительно оси  $Ox$ . В этом случае имеем

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \Big|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left( \frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

Рассмотрим теперь примеры стереометрических задач.



Задача 6: Переставить пределы повторного интегрирования в порядке  $\{z, y, x\}$  для интеграла

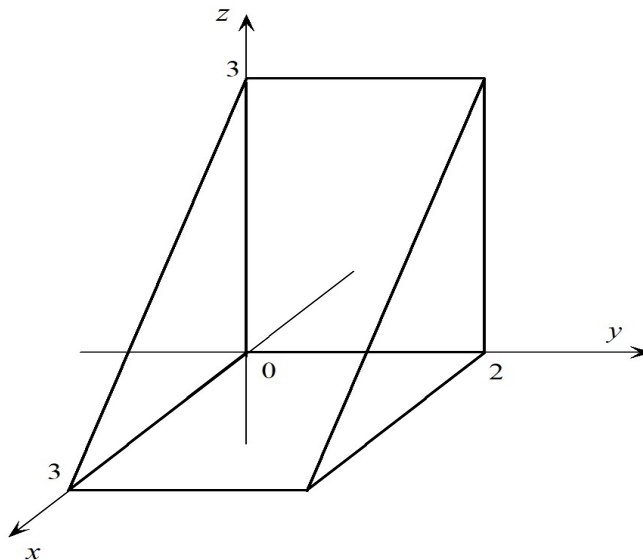
$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

Решение: 1) Заметим, что тело  $V$  ограничено снизу частью конической поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$ , а сверху плоскостью  $z = 1$ .

2) После указанного изменения порядка интегрирования, применяя к области  $V$  метод секущих плоскостей, получаем

$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx.$$

Задача 7: Вычислить интеграл  $J = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ , где область  $V$  лежит в положительном ортанте и ограничена плоскостями  $y = 2$  и  $x + z = 3$ .



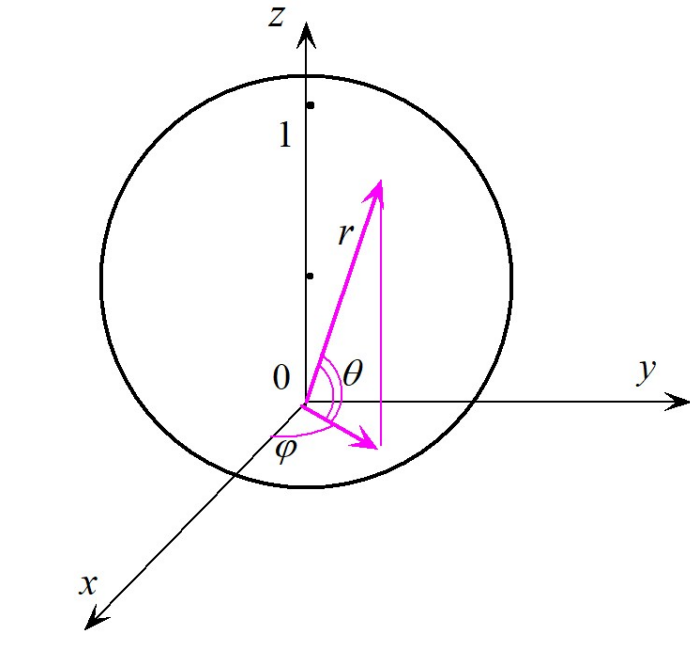
Решение: 1) В данной задаче  $V$  есть прямая треугольная призма. Координаты точек в  $V$

удовлетворяют системе неравенств 
$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 3 - x, \\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

2) Поэтому (проверьте выкладки)

$$J = \int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^{3-x} \frac{dz}{(x + y + z + 1)^3} = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{8}.$$

Задача 8: Вычислить интеграл  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .



Решение: 1) Область  $V$  есть шар радиуса  $\frac{1}{2}$  с центром в точке  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , а каноническое уравне-

ние его поверхности  $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ .

2) Перейдем в сферическую систему координат по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \text{ с модулем якобиана } |J| = r^2 \cos \theta.$$



3) Поскольку на границе области  $V$  имеем  $r^2 = r \sin \theta$ , то здесь будет  $r = \sin \theta$ .

Откуда получаем, что в сферических координатах  $V^* = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq \sin \theta. \end{cases}$

4) В итоге

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz = \iiint_{V^*} r^3 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin \theta} r^3 \, dr = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$