КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Свойства

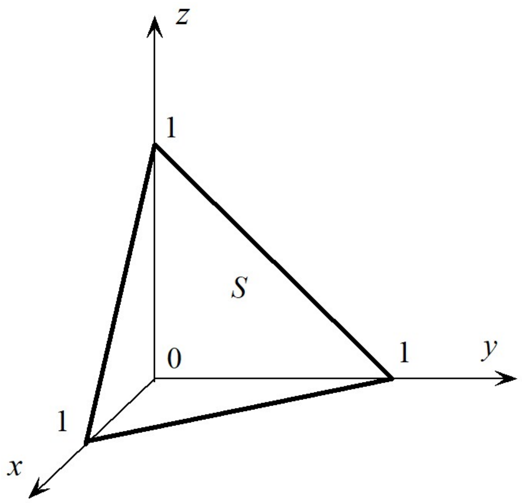
Криволинейный интеграл первого рода при изменении направления обхода не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположный.

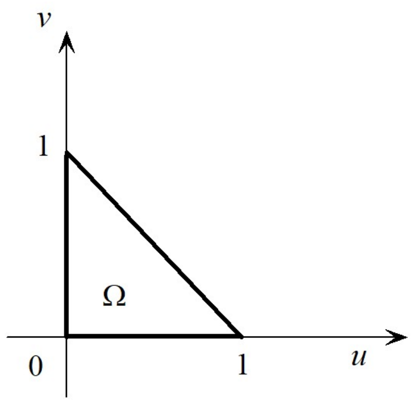
Поверхностный интеграл первого рода при изменении ориентации поверхности не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположную.

Свойства криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала.

В E^3 с ОНБ **заданы**:	**Скалярное поле** $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$	**Векторное поле** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{cases}$
Линия L $\vec{r} = \vec{r}(t)\ t \in [\alpha,\beta]$ или в координатах $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ Функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ непрер. дифф. для $t \in [\alpha,\beta]$	*Криволинейный интеграл первого рода* $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl =$ $= \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$	*Криволинейный интеграл второго рода* $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x_t' + Q(x(t),y(t),z(t))y_t' + R(x(t),y(t),z(t))z_t')\,dt$
Поверхность S $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad (u;v) \in \Omega \subseteq E^2$ или в координатах $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ Функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ непр.о дифф. для $(u;v) \in \Omega \subseteq E^2$	*Поверхностный интеграл первого рода* $\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds =$ $= \iint\limits_\Omega f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$, где $E = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2$ $G = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$ $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$	*Поверхностный интеграл второго рода* $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$ $= \iint\limits_\Omega \begin{vmatrix} P(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) & Q(\ldots\ldots\ldots) & R(\ldots\ldots\ldots) \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv$

Пример 01 .Вычислить $\iint\limits_S xyz\,ds$, где $S: \begin{cases} x+y+z=1, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ z\ge 0 \end{cases}$.





Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S: \begin{cases} x(u,v)=u, \\ y(u,v)=v, \\ z(u,v)=1-u-v \end{cases}$,

где $(u,v)\in\Omega$.

2) В нашем случае $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = uv - u^2v - uv^2$,.

3) Находим $E=2, G=2, F=1$ $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{3}$.

4) Формулируем и вычисляем интеграл $J=\iint\limits_\Omega (uv-u^2v-uv^2)\sqrt{3}\,dudv = \dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

Пример 02 .Вычислить $\iint\limits_S z\,dxdy$, где $S:\ \left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\right.$.

Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S:\ \begin{cases} x(u,v)=a\cos u\cos v, \\ y(u,v)=b\sin u\cos v, \\ z(u,v)=c\sin v \end{cases}$,

где $(u,v)\in\Omega=\begin{cases} 0\le u<2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}\le v\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

2) Формулируем и вычисляем интеграл

$$J=\iint\limits_\Omega \det\begin{Vmatrix} 0 & 0 & c\sin v \\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v \end{Vmatrix} dudv=\iint\limits_\Omega Hc\sin v\,dudv,$$

где $H=ab\sin v\cos v$.

Таким образом, $J=\iint\limits_\Omega abc\sin^2 v\cos v\,dudv=\dfrac{4\pi}{3}abc$.

ФОРМУЛА ГРИНА

Определение и свойства

Пусть ∂G есть кусочногладкий контур, являющийся границей плоской ограниченной области G.

Тогда, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}$,
то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\partial G} Pdx + Qdy$$

Направление обхода контура таково, что в процессе обхода область G остается *слева*.

Пусть Γ_{AB} некоторая кусочногладкая линия целиком лежащая в области G, причем A - ее начало, а B -ее конец.
Тогда значение интеграла $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\exists u(x,y)$ такая, что $du = Pdx + Qdy$.
В этом случае $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$.

Необходимое условие независимости значения интеграла от пути интегрирования есть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. А, если область G *односвязная*, то это условие достаточное.

Наконец, из формулы Грина следует, что площадь области G
может находиться по формуле $S = \iint\limits_{G} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} xdy - ydx$.

Пример 01. Вычислить $\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy$, где $G:\quad \{x^2+y^2\le R^2\}$.

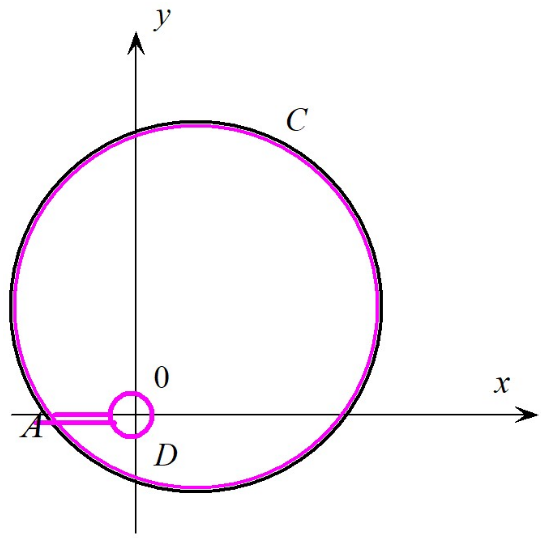
Решение: Имеем

$$\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx+x(1+y^2)\,dy=\iint\limits_{G}(1+y^2-1+x^2)\,dxdy=\iint\limits_{G}(x^2+y^2)\,dxdy$$

Перейдя к полярным координатам $=\iint\limits_{G^*}r^3\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=\dfrac{\pi R^4}{2}$.

Пример 02. Вычислить $I_C = \oint\limits_{\partial G} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где ∂G - простой контур, обходящий область, оставляя ее слева..

Решение: Имеем $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Означает ли это, что $I_C = 0$? Не обязательно!



Дело в том, что исходный контур интегрирования может иметь внутреннюю особую точку 0 .
Если контур C не охватывает эту точку, то ответ будет $I_C = 0$.

Если особая точка внутри "черного" контура, то построим "лиловый" контур (как показано на рисунке)
добавив разрез и достаточно малую окружность, охватывающую особую точку.

Пусть интегралы будут равны:

I_+ - по верхнему берегу разреза,

I_- - по нижнему берегу разреза,

I_D - по маленькой окружности вокруг 0,

I_L - по "лиловому контуру".

Имеем $I_- = -I_+$.

I_D вычислим непосредственно. Пусть параметризация маленькой окружности выбрана такой: $\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi)$,
где a - достаточно малое положительное число.
Тогда, учитывая, что при обходе круга D, он остается справа, получим

$$I_D = \oint\limits_D \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t \cdot a\cos t - a\sin t \cdot (-a\sin t)}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi .$$

Наконец, $I_L = 0$, поскольку внутри "лилового" нет особых точек.

Из адитивности интеграла следует, что $I_L = I_+ + I_D + I_- + I_C = 0$. Тогда искомый интеграл будет равен $I_C = 2\pi$.

ВЫБОР СТОРОНЫ ПОВЕРХНОСТИ
(Система координат *правая* прямоугольная!)

Параметризация гладкой поверхности $S:\quad \vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(u,v) \quad (u;v)\in\Omega\subseteq E^2$

или в координатах $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

определяет не только поверхность, но и ее сторону направлением вектора нормали $\vec{n}$.

Введем в рассмотрение векторы $\vec{r}_u{}'$ и $\vec{r}_v{}'$. Их векторное произведение есть вектор нормали $\vec{n} = [\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']$.

Пример 03: для сферы с параметризацией

$$\begin{cases} x = R\cos u\cos v \\ y = R\sin u\cos v \\ z = R\sin v \end{cases} \quad \Omega = \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

При этом $\vec{n} = R^2\begin{Vmatrix} \cos u\cos^2 v \\ \sin u\cos^2 v \\ \sin v\cos v \end{Vmatrix}$.и можно показать, что $\vec{r} = k\vec{n}$, где $k = R\cos v \ge 0$. Значит, это *внешняя* нормаль.

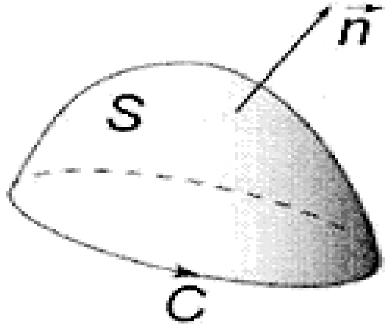
Направляющие косинусы

Из курса линейной алгебры известно, что в ОНБ $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ для координат вектора $\vec{r}$ верно $x_i = (\vec{r}, \vec{e}_{\backslash}) \quad i = 1,2.3$.

Если $\vec{n}$ - нормированный (с единичной длиной) вектор, то $\vec{n} = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{matrix} \right\|$, где α, β, γ - углы между вектором $\vec{n}$ и ортами $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$.

Формула Стокса

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$



В формуле Стокса направление обхода контура C
и направление нормали к поверхности S должны быть 'согласованы'.

Согласование означает, что наблюдатель, движущийся по направлению обхода контура так, что при направлении нормали от ног к голове, видит поверхность слева от себя.

Заметим, что при $dz = 0$ формула Стокса превращается в формулу Грина.

Другой вариант записи формулы Стокса

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \det \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix} ds ,$$

где в первой строке стоят направляющие косинусы нормированного вектора $\vec{n}$, обеспечивающие согласование.

Пример 04. Вычислить $I_C = \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C - окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

ориентированная против часовой стрелки, если на нее смотреть с конца оси $0x$.

Решение: 1) Поскольку поверхность S не задана, в качестве S возьмем часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченной контуром C. По правилу согласования в нашем случае нормальный нормированный вектор $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Наконец, векторное поле имеет вид $\vec{F} = \begin{Vmatrix} y \\ z \\ x \end{Vmatrix}$.

2) Для производных векторного поля $\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \end{cases}$.

Поэтому, окончательно,

$$I_C = \iint\limits_S ((-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}})\,ds = -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_S ds = -\pi\, a^2 \sqrt{3}\,.$$

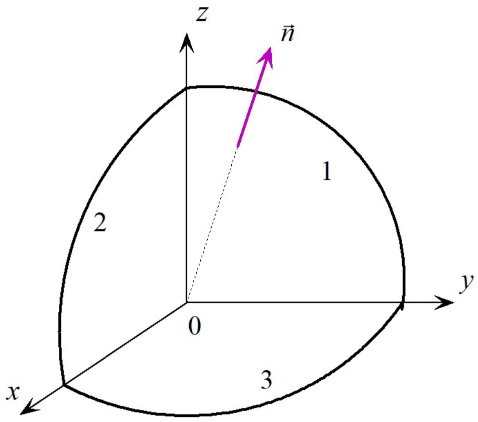
Формула Гаусса-Остроградского

Пусть S кусочно гладкая граница замкнутой области V с непрерывнодифференцируемым векторным полем, тогда справедлива формула *Гаусса-Остроградского*

$$\oiint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

если S внешняя сторона границы V.

Пример 05. Найти $\iint_S x^2 y\,dydz + xy^2 dzdx + xyz\,dxdy$, где S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, находящаяся в положительном ортанте.



Решение: 1) Поскольку поверхность S незамкнутая, то замкнем ее частями координатных плоскостей 1, 2 и 3,
как показано на рисунке.

2) Заметим, что на координатных плоскостях 1 и 2 поверхностный интеграл нулевой, поскольку векторное поле нулевое,
т.к. здесь $P = Q = R = 0$.
На плоской границе 3 поверхностный интеграл также равен нулю, в силу
$\cos\alpha = \cos\beta = 0$ и $R = 0$.

3) Значит, можно применить формулу Гаусса-Остроградского для замкнутой области V .Имеем

$$\begin{cases} P(x,y,z) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \\ Q(x,y,z) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xy, \\ R(x,y,z) = xyz \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = xy. \end{cases}$$

Откуда, переходя в тройном интеграле к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

получим

$$\iiint\limits_V 5xy\,dxdydz = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R (r\cos\varphi\cos\psi)\cdot(r\sin\varphi\cos\psi)\,r^2\cos\psi\,dr =$$

$$= R^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi = \frac{1}{3}R^5.$$