Элементы теории поля

Пусть Ω - область в E^3 с правой прямоугольной декартовой системой координат. Будем обозначать радиус-вектор точки в этой области как $\vec{r}$ с координатным представлением вида $\left\| \vec{r} \right\| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$.

Пусть в области Ω задано скалярное поле $f(x,y,z)$ и векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$ с координатным представлением $\left\| \vec{F} \right\| = \left\| \begin{matrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{matrix} \right\|$.

Введем (по определению) векторно-дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$, называемый "*набла*" и имеющий координатное представление $\left\|\vec{\nabla}\right\| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{matrix}\right\|$.

Используя этот оператора, следует учитывать, что

1°. $\vec{\nabla}$ ведет себя как вектор, удовлетворяющий всем правилам действий с векторами;

2°. $\vec{\nabla}$ является дифференциальным оператором, подчиняющимся правилам дифференцирования. При этом предметом его действия должен быть объект, расположенный в формуле справа от $\vec{\nabla}$. В случае, когда этот объект не определяется однозначно, требуется явно его указывать, выделяя в записи верхней вертикальной стрелкой.

Пример 1. Записать в координатной форме выражение $(\vec{\nabla},\varphi\vec{W})$, где $\varphi(x,y,z)$ - скалярная, непрерывно дифференцируемая функция, а $\vec{W}(x,y,z)$ -векторная, также непрерывно дифференцируемая функция с координатным представлением $\left\|\vec{W}\right\| = \left\|\begin{matrix} W_x(x,y,z) \\ W_y(x,y,z) \\ W_z(x,y,z) \end{matrix}\right\|$.

Решение; Поскольку набла − дифференциальный оператор, то, используя свойства скалярного произведения вектора и ортонормированность базиса, получаем

$$(\vec{\nabla},\varphi\vec{W}) = (\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{W}) + (\vec{\nabla},\varphi\overset{\downarrow}{\vec{W}}) = (\vec{\nabla\varphi},\vec{W}) + \varphi(\vec{\nabla},\vec{W}) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}W_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}W_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}W_z + \varphi\left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}\right).$$

Одной из основных характеристик, используемых при описании скалярного поля является *градиент*.

Определение: *Градиентом скалярного поля* $f(x,y,z)$ называется векторная функция вида $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. Эта функция имеет координатное представление $\|\operatorname{grad} f\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} \right\|$.

Заметим, что с помощью оператора набла вектор градиента может быть записан так $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

При описании свойств векторных полей в приложениях также часто используются две следующие характеристики: скалярная, называемая *дивергенцией*, и векторная, называемая *ротором* (иногда, *ротацией* или *вихрем*).

Определение: *Дивергенцией* векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ называется скалярная функция $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, которая с помощью набла задается формулой $\operatorname{div}\vec{F} = (\nabla, \vec{F})$.

Определение: *Ротором* векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k} = \det\begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix},$$

которая с помощью набла задается формулой $\operatorname{rot}\vec{F} = [\nabla, \vec{F}]$.

Нетрудно убедиться, что, в силу сделанных определений, справедливы следующие равенства $\operatorname{div}\vec{r} = 3$ и $\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{o}$.

Введенные характеристики скалярных и векторных полей позволяют использовать альтернативные формулировки для:

1) теоремы *Стокса* $\displaystyle\oint\limits_{\partial S}(\vec{A}, d\,\vec{r}\,) = \iint\limits_{S}(\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{A})\,ds$

или $\displaystyle\oint\limits_{\partial S}(\vec{A}, d\,\vec{r}\,) = \iint\limits_{S}(\vec{n}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])\,ds = \iint\limits_{S}(\vec{n}, \vec{\nabla}, \vec{A})\,ds$,

2) теоремы *Гаусса-Остроградского* $\displaystyle\oiint\limits_{\partial\Omega}(\vec{A}, \vec{n})\,ds = \iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,dV$

или $\displaystyle\oiint\limits_{\partial\Omega}(\vec{A}, \vec{n})\,ds = \iiint\limits_{\Omega}(\vec{\nabla}, \vec{A})\,dV$.

Пример 01. Найти, используя оператор набла,

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$,

2) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}$,

3) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$,

Решение: Учитывая, что набла одновременно обладает свойствами вектора и дифференциального оператора, получаем:

1) Воспользуемся тем, что из векторного произведения можно выносить скалярный множитель, который мы обязаны записать *справа* от действующего на него оператора, а также тем, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулевому вектору. Тогда получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = \vec{o} \ .$$

2) В этом случае воспользуемся возможностью циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении и коммутативностью скалярного произведения для соблюдения требовании расположения оператора. В результате имеем:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = (\nabla, [\nabla, \vec{F}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{F}) = (\vec{o}, \vec{F}) = 0 \ .$$

3) Имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) = (\nabla, \nabla f) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = \Delta f \ ,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Пример 02. Для известных векторных полей $\vec{A}(x,y,z)$ и $\vec{B}(x,y,z)$ найти $\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}]$.

Решение: Используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. В этом случае можно записать:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}] &= (\nabla,\overset{\downarrow}{[\vec{A},\vec{B}]}) = (\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}]) + (\nabla,[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) = \\ &= (\vec{B},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{A}}]) + (\vec{A},[\overset{\downarrow}{\vec{B}},\nabla]) = (\vec{B},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{A}},]) - (\vec{A},[\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{B}}]) = \\ &= (\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}) - (\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B})\,.\end{aligned}$$

Пример 03. Для известных полей $f(x,y,z)$ и $\vec{F}(x,y,z)$ найти $\operatorname{rot}(f\vec{F})$.

Решение: Снова используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. Тогда имеем:

$$\operatorname{rot}(f\vec{F})=[\nabla,(\overset{\downarrow}{f\vec{F}})]=[\nabla,(\overset{\downarrow}{f}\vec{F})]+[\nabla,(f\overset{\downarrow}{\vec{F}})]=$$

$$=[\nabla f,\vec{F}]+f[\nabla,\vec{F}]=[\operatorname{grad} f,\vec{F}]+f\operatorname{rot}\vec{F}\,.$$

Пример 04. 1) Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2) Для какого скалярного поля будет $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)=0$?

Решение: `1) Введем обозначения $P=\dfrac{\partial f(r)}{\partial x}$; $Q=\dfrac{\partial f(r)}{\partial y}$; $R=\dfrac{\partial f(r)}{\partial z}$. Тогда имеем

$$P=\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df}{dr}\cdot r'_x=f\,'(r)\cdot\frac{x}{r}$$

$$Q=\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f\,'(r)\cdot\frac{y}{r};$$

$$R=\frac{\partial f(r)}{\partial z}=f\,'(r)\cdot\frac{z}{r}.$$

Откуда $\operatorname{grad} f(r)=\dfrac{f\,'(r)}{r}\vec{r}$.

С другой стороны,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{f\,'(r)}{r}+x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f\,'(r)}{r})=\frac{f\,'(r)}{r}+x\frac{d}{dr}(\frac{f\,'(r)}{r})\cdot r'_x=$$

$$=\frac{f\,'(r)}{r}+x\frac{rf\,''(r)-f\,'(r)}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{f\,'(r)}{r}+x^2\,\frac{rf\,''(r)-f\,'(r)}{r^3}\,.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{f\,'(r)}{r}+y^2\,\frac{rf\,''(r)-f\,'(r)}{r^3}\quad \text{и}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{f\,'(r)}{r}+z^2\,\frac{rf\,''(r)-f\,'(r)}{r^3}$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)=\frac{3f\,'(r)}{r}+\frac{rf\,''(r)-f\,'(r)}{r^3}r^2=f\,''+\frac{2f\,'(r)}{r}$$

2) Теперь найдем, в случае какого поля $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = 0$.

Решим уравнение $f'' + \dfrac{2f'(r)}{r} = 0$.

Понизим порядок заменой $u(r) = f'(r)$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' + \dfrac{2u}{r} = 0$. Это дает, например методом разделения переменных, $u(r) = \dfrac{C_1}{r^2}$. Откуда, окончательно, $f(r) = \dfrac{C_1}{r} + C_2 \quad \forall C_1, C_2$.

Пример 05. Показать, что поток векторного поля $\vec{F} = \vec{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

Решение: `Справедливость утверждения следует из формулы Гаусса-Остроградского и равенства $\operatorname{div}\vec{r} = 3$.

Пример 06. Показать, что из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме следует, что напряженности как электрического, так и магнитного полей удовлетворяют однородному *уравнению гармонических колебаний*.

Решение: `1) Уравнения Максвелла в данном случае могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B} = \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \end{cases}$$

Если взять ротор от обеих частей первого уравнения, то получим равенство

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B},$$

правая часть которого есть, в силу третьего уравнения $-\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, а левая вычисляется при помощи оператора набла и формулы для двойного векторного произведения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = [\nabla,[\nabla,\vec{E}]] = \nabla(\nabla,\vec{E}) - (\nabla,\nabla)\vec{E} = \operatorname{grad}\ \operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}.$$

Поскольку в силу второго уравнения системы $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, то мы приходим к уравнению $\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Для поля $\vec{B}$ рассуждения аналогичные.