

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Базовые определения и обозначения для тензоров

Для произвольного натурального n упорядоченный набор, состоящий из n^k чисел вида

$$\left\{ \xi_{i_1 i_2 \dots i_k}, \text{ где } i_r = [1, n] \quad \forall r = [1, k], \forall k \right\}$$

будем именовать k -мерной матрицей или матрицей размера n^k (k – любое неотрицательное целое число)

Тензором в Λ^n назовем k -мерную матрицу, значения элементов которой меняются по линейным формулам при переходе от одного базиса к другому. Причем коэффициенты пропорциональности в этих линейных формулах суть элементы матрицы перехода (возможно как прямого, так и обратного).

Замечание: здесь под матрицами перехода понимаются как они сами, так и результат их транспонирования – разницы нет, так как элементы в них одни и те же.

Иными словами, тензор есть *многомерная матрица плюс специальное линейное правило* изменения ее компонентов при смене базиса.

На практике оказывается, что тензоры являются удобным инструментом количественного описания различных объектов и явлений (в первую очередь, физических).

Далее будем считать, что исходный базис в Λ^n есть $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}$, а «новый» – $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \dots, \vec{g}'_n\}$, при этом матрица прямого перехода (от исходного к «новому»)

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{vmatrix}, \text{ а матрица обратного } - \|S\|^{-1} = \|T\| = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{vmatrix}.$$

Условимся также, что все характеристики, относящиеся к «новому» базису будем помечать верхним штрихом.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим трехмерное линейное пространство Λ^3 , в котором исходный базис есть

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}, \text{ а «новый» — } \left\{ \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3 \right\}, \text{ тогда:}$$

1°. Координатное представление вектора \vec{r} в Λ^3 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ есть тензор, поскольку

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \|S\|^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \|T\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

что можно записать как $\xi'_s = \sum_{t=1}^3 \tau_{st} \xi_t \quad \forall s = [1,3]$.

Линейность формул преобразования компонент численного описания объекта (в данном случае – вектора) по элементам матрицы обратного перехода очевидна

Тензоры такого вида принято называть *одновалентными контравариантными* (то есть меняющиеся как базисные векторы при *обратном* переходе).

Для справки напомним, что формулы перехода и рассматриваемом случае таковы:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \|S\| \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = \|T\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{pmatrix} = \|S\|^T \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{pmatrix} = \|T\|^T \begin{pmatrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{pmatrix}.$$

2°. Координатное представление *линейного функционала (линейной функции)* $f(\vec{r})$ в пространстве Λ^3 , имеющее вид

$$f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^3 \varphi_j \xi_j = \left\| \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|,$$

есть *тензор с компонентами* φ_j $j = [1,3]$, поскольку (из курса линейной алгебры) известно, что

$$\left\| \varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3 \right\| = \left\| \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \right\| \left\| S \right\| \quad \text{или, что то же самое} \quad \left\| \begin{matrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \end{matrix} \right\| = \left\| S \right\|^T \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} \right\|.$$

В координатах данное соотношение очевидно линейно по компонентам матрицы прямого перехода $\left\| S \right\|$ и имеет вид

$$\varphi'_s = \sum_{t=1}^3 \sigma_{st} \varphi_t \quad \forall s = [1,3] \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi'_1 = \sigma_{11} \varphi_1 + \sigma_{21} \varphi_2 + \sigma_{31} \varphi_3, \\ \varphi'_2 = \sigma_{12} \varphi_1 + \sigma_{22} \varphi_2 + \sigma_{32} \varphi_3, \\ \varphi'_3 = \sigma_{13} \varphi_1 + \sigma_{23} \varphi_2 + \sigma_{33} \varphi_3. \end{cases}$$

Обратите внимание, что индексы в записи правила изменения тензорных компонент линейной формы $f(\vec{r})$ расставлены иначе, чем в примере 1°. Тензоры из примера 2° принято называть *одновалентными ковариантными* (то есть меняющиеся как базисные векторы при *прямом* переходе).

3°. Координатное представление *линейного преобразования* \hat{A} в Λ^3 (являющееся

квадратной матрицей третьего порядка $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$) есть тензор, поскольку из

известной формулы $\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|$ следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{pmatrix} = \|T\| \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \|S\|$$

или

$$\alpha'_{st} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tau_{sj} \sigma_{it} \alpha_{ji} \quad \forall s = [1,3], \quad \forall t = [1,3]$$

Тензоры такого вида называют *двухвалентными*, *один раз ковариантными и один раз контравариантными*.

4°. Координатное представление билинейного функционала (билинейной формы)

$B(\vec{x}, \vec{y})$ в Λ^3 также будет тензором, поскольку это есть квадратная матрица

третьего порядка $\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$, для которой при замене базиса справедлива

формула $\|B\|_{g'} = \|S\|^T \|B\|_g \|S\|$. Это равенство можно также записать в виде

$$\begin{vmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \beta'_{13} \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \beta'_{23} \\ \beta'_{31} & \beta'_{32} & \beta'_{33} \end{vmatrix} = \|S\|^T \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \|S\|$$

или

$$\beta'_{st} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{js}^T \sigma_{it} \beta_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{sj} \sigma_{it} \beta_{ji} \quad \forall s = [1,3], \quad \forall t = [1,3].$$

Заметьте, что для записи последней формулы было использовано очевидное равенство $\sigma_{sj}^T = \sigma_{js}$. Такие тензоры называют *двухвалентными, дважды ковариантными*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Из приведенных выше примеров можно заключить, что валентность тензора это размерность его матрицы – k , а p – «число ковариантностей» (q – «число контравариантностей») определяется числом использования матрицы $\|S\|$ (соответственно матрицы $\|T\|$) в формуле пересчета значений компонент тензора при замене базиса.

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} \text{в примере 1}^\circ & 1 = k = p + q = 0 + 1, \\ \text{в примере 2}^\circ & 1 = k = p + q = 1 + 0, \\ \text{в примере 1}^\circ & 2 = k = p + q = 1 + 1, \\ \text{в примере 1}^\circ & 2 = k = p + q = 2 + 0. \end{aligned}$$

Если это так, то можно использовать следующую версию определения тензора.

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве Λ^n определен тензор типа (q, p) q раз контравариантный и p раз ковариантный (или $(p + q)$ -валентный), если в Λ^n он характеризуется упорядоченным набором n^{p+q} чисел $\xi_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p}$ (где $j_m = [1, n]$; $m = [1, q]$ – контравариантные индексы и $i_s = [1, n]$; $s = [1, p]$ – ковариантные), преобразующихся при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ по закону

$$\xi'_{j'_1 j'_2 \dots j'_q i'_1 i'_2 \dots i'_p} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{i_1 i'_1} \sigma_{i_2 i'_2} \dots \sigma_{i_p i'_p} \tau_{j'_1 j_1} \tau_{j'_2 j_2} \dots \tau_{j'_q j_q} \xi_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p},$$

где $i'_s = [1, n]$; $s = [1, p]$ и $j'_m = [1, n]$; $m = [1, q]$, а σ_{ij} и τ_{ij} суть соответственно компоненты матрицы перехода $\|S\|$ и ей обратной $\|T\| = \|S\|^{-1}$.

Громоздкость записи и неудобочитаемость тензоров при использовании стандартной схемы обозначений очевидны уже на примере этого определения. Поэтому в тензорном исчислении используется специальная, более компактная форма описания тензорных объектов и операций с ними, основу которой составляют следующие правила.

- 1°. Если какой либо из индексов принимает все значения от 1 до n , то в записи тензора этот перечень значений не указывается. Например, запись $\alpha_i = \beta_i$ означает, что

$$\alpha_i = \beta_i \quad \forall i = [1, n].$$

- 2°. *Порядок следования индексов в записи тензоров существен.* Для того чтобы избежать возможной неоднозначности, применяется следующее правило: если необходимо выписать последовательно все компоненты тензора (например, в виде одной строки), то в первую очередь (если возможно!) увеличиваются индексы, расположенные ближе к правому концу индексного списка.

Например, тензор ξ_{ijs} в Λ^2 имеет следующий порядок компонентов:

$$\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{121}, \xi_{122}, \xi_{211}, \xi_{212}, \xi_{221}, \xi_{222}.$$

3°. Ковариантные и контравариантные индексы в общем случае различаются так: ковариантные индексы записываются как *нижние*, а контравариантные – как *верхние* индексы.

В ряде важных частных случаев (к которым относятся вопросы, рассматриваемые нами далее) разница между ковариантными и контравариантными индексами не существенна, либо вовсе отсутствует. В наших формулах мы будем использовать лишь нижние индексы. Соответствующие пояснения будут даны позднее.

4°. Пусть имеется выражение, являющееся произведением сомножителей, имеющих повторяющиеся индексы, причем каждый такой индекс встречается в записи выражения *ровно дважды*. Тогда по определению считается, что это выражение есть *сумма таких произведений, выписанных для всех значений повторяющегося индекса*. Данную сумму принято называть *сверткой тензора по индексу*.

В случае присутствия в выражении нескольких пар совпадающих индексов имеет место многократное суммирование.

Отметим, что использование одного и того же индекса в записи тензора более двух раз запрещено по определению.

Пример: значение квадратичного функционала (квадратичной формы)

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ji} \xi_j \xi_i$$

можно записать теперь в виде двойной свертки $\varphi_{ji} \xi_j \xi_i$.

СЛУЧАЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Будем рассматривать n -мерное евклидово пространство E^n с правыми ортонормированными базисами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$.

Из курса линейной алгебры известно, что ортогональные матрицы (и только они!) служат матрицами перехода от одного ОНБ к другому. При этом для любой ортогональной матрицы $\|S\|$ справедливо равенство $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$, поэтому разница между ковариантными и контравариантными случаями в евклидовом пространстве с ОНБ *отсутствует*, то есть все тензорные формулы выглядят одинаково при их записи как через верхние, так и через нижние индексы. И в дальнейших выкладках мы будем пользоваться только нижними индексами.

Чуть отклоняясь от основного направления изложения рассматриваемого вопроса, заметим, что в произвольном базисе евклидова пространства различие в ковариантной и контравариантной формах записи одного и того же тензора имеется, но оно не принципиально. Действительно, наличие операции скалярного произведения и матрицы Грама (являющейся двухвалентным, дважды ковариантным тензором) позволяет однозначно переводить эти записи из одной формы в другую и обратно. Понятно, что в произвольном конечномерном линейном пространстве Λ^n подобные манипуляции невозможны.

Если интересны детали, то их можно посмотреть в любом ресурсе по тензорному исчислению тему «Операция подъема и опускания тензорных индексов в евклидовом пространстве».

Теперь приведем некоторые полезные обозначения и соотношения, записанные (по возможности) как в традиционной векторно-координатной форме, так и в тензорном виде.

1°. Разложение вектора \vec{x} по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в E^3 :

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3 \quad \text{или} \quad \vec{x} = \xi_i \vec{e}_i$$

2°. Символ Кронекера – это двухвалентный тензор $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ Нетрудно пока-

зать, что в любом базисе его компоненты совпадают с элементами единичной матрицы. Кроме того, его свертка $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

3°. Символ Леви-Чевиты – это трехвалентный тензор

$$\varepsilon_{jik} = \begin{cases} 0, & \text{если среди } i, j, k \text{ есть равные,} \\ 1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ – четная перестановка,} \\ -1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ – нечетная перестановка.} \end{cases}$$

Его компоненты не меняются при циклической перестановке индексов. Свертки для этого тензора имеют вид:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$$

Нетрудно проверить, что значение символа Леви-Чевиты не меняется при циклической перестановке индексов и меняет знак на противоположный при антициклической перестановке.

4°. Пусть в E^3 заданы векторы $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$ и $\vec{c} = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \kappa_3 \vec{e}_3$ с тензорными представлениями соответственно $\vec{a} = \alpha_i$, $\vec{b} = \beta_i$ и $\vec{c} = \kappa_i$. Тогда в тензорном виде скалярное произведение записывается просто как свертка $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_i \beta_i$, а для векторного произведения $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ имеем формулу $\kappa_i = \varepsilon_{ijk} \alpha_j \beta_k$.

Заметьте, что соотношения указанные в п. 3° и 4°, нуждаются в обосновании. Выполните это обоснование самостоятельно.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ

Введем в рассмотрение векторно-дифференциальный оператор *набла*, записываемый символически как $\vec{\nabla} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}$ или, в тензорном виде $\vec{\nabla} = e_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, что

равносильно $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. При этом достаточно часто приходится использовать, также и неко-

торые комбинации этого оператора, определяемые правилами математического анализа и линейной алгебры. Выпишем основные из них.

1°. *Градиент скалярного поля.* Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно

дифференцируемая функция $u(\vec{r}) = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *градиентом* называется вектор

$\text{grad } u = e_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial u}{\partial \xi_3}$. В символическом виде это можно записать как

действие оператора *набла* на скалярную функцию $\text{grad } u = \vec{\nabla} u$, а в тензорном фор-

мате в виде свертки – разложения по базису – как $\text{grad } u = e_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i}$.

2°. *Дивергенция векторного поля.* Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *дивергенцией* называется скалярная функция $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_3}{\partial \xi_3}$. В символическом виде, через скалярное произведение, эту функцию можно записать как $\operatorname{div} \vec{A} = (\vec{\nabla}, \vec{A})$, а в тензорном виде определение дивергенции – $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_i}$.

3°. *Ротор векторного поля.* Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *ротором* называется

векторная функция $\operatorname{rot} \vec{A} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$. В символическом виде, через век-

торное произведение, эту функцию можно записать как $\operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}]$, а в тензорном виде определение ротора будет $\operatorname{rot} \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} \vec{e}_k$.

4°. *Оператор Лапласа (лапласиан)*. Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *лапласианом* называется векторная функция $\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_3^2}$. В символическом виде, через скалярное произведение, эту функцию можно записать как $\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$, а в тензорное определение лапласиана таково: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_i}$.

При вычислении различных комбинаций в символическом виде следует помнить, что оператор набла в этих комбинациях с одной стороны ведет себя как вектор (то есть удовлетворяет известным соотношениям из курса векторной алгебры), а с другой – является оператором дифференцирования, действующего на скалярные или векторные функции, стоящие в записи вправо от него согласно правилам вычисления производных.

Поясним это примерами.

1°. Найти $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$.

Решим задачу вначале *символическим методом*. Имеем по свойствам скалярного, смешанного и векторного произведений векторов

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]) = ([\vec{\nabla}, \vec{\nabla}], \vec{A}) = (\vec{0}, \vec{A}) = 0.$$

Тензорный метод. Символ Леви-Чевиты равен нулю, если хотя бы у одной из пар его индексов значения одинаковы, поэтому в тензорной форме у трехкратной

свертки из 27 слагаемых $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial \xi_i} e_k$ будут лишь шесть ненулевых.

Со знаком «плюс» для значений индексов $\{i, j, k\} - \{1, 2, 3\}, \{3, 1, 2\}$ и $\{2, 3, 1\}$ – это:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi_3 \partial \xi_1}, \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \text{ и } \frac{\partial^2 A_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2},$$

и со знаком «минус» для значений индексов $\{i, j, k\} - \{2, 1, 3\}, \{3, 2, 1\}$ и $\{1, 3, 2\}$ – это:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_3 \partial \xi_2}, \frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \text{ и } \frac{\partial^2 A_3}{\partial \xi_2 \partial \xi_1},$$

что в итоге дает свертке значение ноль.

2°. Для векторных полей \vec{A} и \vec{B} найти $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}]$.

Символический метод. По формуле дифференцирования произведения функций, свойствам смешанного произведения и правилу записи действия оператора имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] &= (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}]) + (\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\vec{B}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) + (\vec{A}, [\vec{B}, \vec{\nabla}]) = \\ &= (\vec{B}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) - (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{B}]) = (\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A}) - (\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}). \end{aligned}$$

Верхней вертикальной стрелкой \downarrow мы показали, на какой из сомножителей в векторном произведении полей действует оператор набла.

Тензорный метод. Здесь учтем, что при циклической перестановке индексов символ Леви-Чевиты не изменяет своих значений, а при антициклической (то есть с однократным изменением порядка следования двух соседних индексов) меняет знаки значений на противоположные. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] &= \frac{\partial}{\partial \xi_k} [\vec{A}, \vec{B}]_k = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\varepsilon_{ijk} A_i B_j) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} B_j + \varepsilon_{ijk} A_i \frac{\partial B_j}{\partial \xi_k} = \\ &= B_j \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} - A_i \varepsilon_{kji} \frac{\partial B_j}{\partial \xi_k} = (\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A}) - (\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}). \end{aligned}$$

3°. Показать, что векторы \vec{E} и \vec{B} , удовлетворяющие системе уравнений Максвелла для вакуума

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases}$$

будут являться решением волновых уравнений вида:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Символический метод. Возьмем ротор от обеих частей первого из уравнений системы. Для левой части по формуле «bac-cab» получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \overset{\downarrow}{\vec{E}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}. \end{aligned}$$

Но поскольку в силу второго уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$.

Для правой части (с учетом третьего уравнения Максвелла) находим, что

$$-\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Итак, $-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. Второе волновое уравнение выводится аналогично. Проверьте это самостоятельно.

Тензорный метод. Проверим справедливость формулы $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$.
Имеем

$$\text{rot rot } \vec{E} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \text{rot } E_j}{\partial \xi_i} e_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\varepsilon_{stj} \frac{\partial E_t}{\partial \xi_s} \right) e_k =$$

выполнив в первом сомножителе циклическую перестановку индексов и используя формулу для свертки символа Леви-Чевиты по последнему индексу (см. стр. 6), получим

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\varepsilon_{stj} \frac{\partial E_t}{\partial \xi_s} \right) e_k = \delta_{ks} \delta_{it} \frac{\partial^2 E_t}{\partial \xi_i \partial \xi_s} e_k - \delta_{kt} \delta_{is} \frac{\partial^2 E_t}{\partial \xi_i \partial \xi_s} e_k = \\ &= \frac{\partial^2 E_i}{\partial \xi_i \partial \xi_k} e_k - \frac{\partial^2 E_k}{\partial \xi_i^2} e_k = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}. \end{aligned}$$

Использованная при этом свертка с символом Кронекера выполняется тривиально: например, $\delta_{lj} \Omega_i = \Omega_j$ или $\delta_{lj} \delta_{st} \Omega_{isk} = \Omega_{jtk}$.

Сведение к волновому уравнению в тензорной форме выполните в качестве итогового теста.