

Введение в ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим некоторые варианты применения понятий и методов, рассмотренных ранее в курсах математического анализа и линейной алгебры, для построения координатной схемы описания элементов в линейных пространствах, не имеющих базиса.

Основной особенностью n -мерного линейного пространства является существование в нем *базиса*, то есть:

упорядоченного *конечного* набора $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ линейно независимых элементов такого, что добавление в него любого элемента пространства делает этот набор линейно зависимым.

В этом случае *каждый* элемент линейного пространства x может быть представлен *единственным образом* как линейная комбинация базисных элементов

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j g_j, \quad (1)$$

где упорядоченный набор чисел ξ_j (называемых *координатами* элемента x в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$) дает полное описание этого элемента. Максимально возможное число линейно независимых элементов в линейном пространстве с базисом принято называть *размерностью* пространства.

Известно, что базис существует не в любом линейном пространстве, где имеются линейно независимые элементы.

Например, в $LC[-1, 1]$ – линейном пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на отрезке $\tau \in [-1, 1]$ – набор элементов вида $\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^k\}$ линейно независим при любом целом неотрицательном k . Но для этого набора всегда существует элемент τ^{k+1} , добавление которого не нарушает линейной независимости (проверьте это самостоятельно). Следовательно, базиса в таком линейном пространстве нет, и в нем невозможно стандартное координатное описание элементов.

С другой стороны, удобства координатного представления элементов линейного пространства вполне очевидны. Поэтому представляется целесообразной попытка обобщения понятия координат таким образом, чтобы их использование оказалось бы возможным и в линейных пространствах с *неограниченным* числом линейно независимых элементов.

Кратко опишем идеи двух возможных подходов к решению этой проблемы.

- 1) Пусть имеется линейное n -мерное пространство, в котором определено скалярное произведение элементов (x, y) , то есть, *евклидово* пространство E^n . Если $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ – базис в E^n , то для каждого элемента x в силу (1) будет верным

$$\sum_{j=1}^n (g_j, g_k) \xi_j = (x, g_k) \quad \forall k = [1, n]. \quad (2)$$

Здесь (2) является системой линейных уравнений, которая (в силу теоремы Крамера) всегда совместна и однозначно разрешима относительно координат, поскольку ее основная матрица есть матрица Грама – не вырожденная для линейно независимого набора элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Заметим, что в случае *ортонормированного* базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (который всегда существует в E^n) система (2) распадается на n независимых равенств вида

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, n], \quad (3)$$

поскольку $(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$

С другой стороны, согласно аксиоматике евклидова пространства, скалярное произведение существует независимо от того, является ли данное пространство конечномерным или нет. Поэтому формулы (3) *условно* можно принять за определение координат элемента $x \in E$ – в евклидовом пространстве с неограниченным числом линейно независимых элементов.

Условия, выполнение которых необходимо, для того, чтобы члены последовательности $\{\xi_k\}$, где

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, +\infty), \quad (4)$$

можно было бы рассматривать, как аналоги координат элемента $x \in E$, таковы:

- все элементы в наборе линейно независимых $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ должны быть нормированы и попарно ортогональны, то есть, $(e_j, e_k) = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in N$;
- ряд $\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$ должен быть сходящимся в некотором $\Omega \subseteq E$;
- сумма этого ряда должна совпадать (или быть близкой в некотором смысле) к x .

Здесь напомним (в связи с использованием понятия сходимости ряда), что в качестве нормы элемента $x \in E$ можно принять число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а в качестве метрики – (меры близости (или расстояния) для элементов x и y) – число $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Это позволяет использовать понятия *фундаментальности* и *сходимости* для последовательности элементов в E и, конкретно, для последовательностей частичных сумм ряда $\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$.

В качестве примера рассмотрим в $EC[-1, 1]$ – евклидовом пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на промежутке $[-1, 1]$ и со скалярным произведением $(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau)y(\tau) d\tau$ – последовательность линейно независимых элементов $\{g_k(\tau) = \tau^k \ k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Элементы такой последовательности не являются попарно ортогональными. Например,

$$(g_1, g_3) = \int_{-1}^1 g_1(\tau)g_3(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 \tau^4 d\tau = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Однако в этом случае при помощи процедуры ортогонализации Грама–Шмидта (применимой к наборам с неограниченным числом элементов) можно построить ортогональный набор, а после нормировки, и ортонормированный. В результате (это доказывается в курсе гармонического анализа) получается последовательность степенных многочленов вида:

$$e_0(\tau) = 1, \quad e_1(\tau) = \tau, \quad e_2(\tau) = \frac{1}{8} \left(\tau^2 - \frac{1}{3} \right), \quad \dots \quad e_k(\tau) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\tau^k} (\tau^2 - 1)^k, \quad \dots,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

И этот новый набор многочленов можно использовать для аппроксимации на отрезке $[-1,1]$ любой непрерывной функции $x(\tau)$ при помощи ряда

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k e_k(\tau), \quad \text{где} \quad \xi_k = \int_{-1}^1 x(\tau) g_k(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Ряды вида (5) принято называть *рядами Фурье* и их частичные суммы являются аппроксимациями функции $x(\tau)$ на всем промежутке $[-1,1]$ в то время как степенные ряды (типа ряда Тейлора) дают лишь *локальную* аппроксимацию для фиксированных точек.

Вопросы об условиях сходимости и других свойствах рядов Фурье рассматриваются в курсе гармонического анализа. Здесь же мы обратим внимание на то, что ортогональные системы элементов в бесконечномерных евклидовых пространствах можно также строить по схемам, принципиально отличающимся от метода Грама–Шмидта.

- 2) Разберем одну из таких схем, основанную на использовании свойств *самосопряженных линейных преобразований* (операторов), действующих в E .

Напомним предварительно некоторые необходимые сведения из курса линейной алгебры, используя равенство $y = \hat{A}x$ для обозначения факта: элемент y есть результат действия преобразования \hat{A} на элемент x . Элемент y принято в этом случае называть *образом* элемента x , а элемент x – *прообразом* элемента y .

- 1°. Линейное преобразование \hat{A}^* называется *сопряженным* линейному преобразованию \hat{A} , если $\forall x, y \in E: (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^*y)$. То есть, скалярное произведение при действии оператора \hat{A} на его первый сомножитель совпадает со скалярным произведением при действии \hat{A}^* на второй сомножитель.
- 2°. Линейное преобразование \hat{R} называется *самосопряженным* линейным преобразованием, если $\forall x, y \in E: (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.
- 3°. Ненулевой элемент f называется *собственным вектором* линейного преобразования \hat{A} , который отвечает *собственному значению* λ , если $\hat{A}f = \lambda f$.
- 4°. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие *различными* собственным значениям, *попарно ортогональны*. При этом, из собственных векторов любого самосопряженного преобразования в E^n можно образовать *ортонормированный базис*.
- 5°. Для любого линейного преобразования \hat{A} линейные преобразования $\hat{A}\hat{A}^*$ и $\hat{A}^*\hat{A}$ – *самосопряженные* и имеют *неотрицательные* собственные значения.

Напомним доказательства утверждений, приведенных в 4^о и 5^о.

Пункт 4^о. Пусть f_1 и f_2 – собственные векторы \hat{R} , тогда из $\begin{cases} \hat{R} f_1 = \lambda_1 f_1, \\ \hat{R} f_2 = \lambda_2 f_2 \end{cases}$ следует

$$\begin{cases} (\hat{R} f_1, f_2) = \lambda_1 (f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R} f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2). \end{cases}$$

В силу самосопряженности \hat{R} (то есть равенства левых частей) будем иметь $\lambda_1 (f_1, f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2)$ и, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(f_1, f_2) = 0$.

Пункт 5^о. Справедливы равенства $\forall x, y \in E: (\hat{A}^* \hat{A} x, y) = (\hat{A} x, \hat{A} y) = (x, \hat{A}^* \hat{A} y)$. Но это и означает самосопряженность $\hat{A}^* \hat{A}$.

Из $\hat{A}^* \hat{A} f = \lambda f$ имеем равенство $(\hat{A}^* \hat{A} f, f) = \lambda (f, f)$. Откуда $(\hat{A} f, \hat{A} f) = \lambda (f, f)$ и поэтому, в силу аксиоматики евклидова пространства, верно, что $\lambda \geq 0$.

Рассмотрим теперь множество всевозможных функций $x(\tau)$, имеющих производную *любого* порядка на отрезке $[-1,1]$, и имеющих, вместе со своими производными, на концах этого отрезка равные значения. Нетрудно проверить, что это множество есть линейное пространство.

Превратим его в евклидово пространство, введя скалярное произведение элементов x и y по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Оператор дифференцирования $\hat{D} = \frac{d}{d\tau}$ будет линейным преобразованием, действующим в этом пространстве.

Найдем для него сопряженное преобразование. Интегрирование по частям дает равенства

$$\begin{aligned}(\hat{D}x, y) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau}(\tau)y(\tau) d\tau = \\ &= x(\tau)y(\tau)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x(\tau)\frac{dy}{d\tau}(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-1}^1 x(\tau)\left(-\frac{dy}{d\tau}(\tau)\right) d\tau = (x, \hat{D}^* y).\end{aligned}$$

Откуда $\hat{D}^* = -\frac{d}{d\tau}$. Тогда оператор $\hat{D}^*\hat{D} = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}\right) = -\frac{d^2}{d\tau^2}$ будет самосопряженным и с неотрицательными собственными значениями.

Найдем для него собственные векторы. Условие $\hat{D}^* \hat{D} f = \lambda f$ в данном случае (если положить $\lambda = \omega^2 \geq 0$) является дифференциальным уравнением вида

$$-\frac{d^2 f}{d\tau^2} = \omega^2 f,$$

общее вещественное решение которого описывается формулой $f(\tau) = A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, поскольку собственный вектор ненулевой по своему определению.

Заметим, что в данном случае характеристического уравнения у преобразования $\hat{D}^* \hat{D}$ нет. Однако собственные значения можно найти, используя условия

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Конкретно здесь получаем, что $\sin \omega = 0$, то есть $\omega = \pi k$, где k – любое целое число.

Таким образом, система *линейно независимых* попарно ортогональных функций, являющихся собственными векторами самосопряженного оператора $\hat{D}^* \hat{D}$, имеет вид

$$f_k(\tau) = A \cos \pi k \tau + B \sin \pi k \tau, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Эта система, называемая обычно *тригонометрической*, (также как и система полиномов Лежандра) может использоваться для аппроксимации на $[-1, 1]$ функций $x(\tau)$, удовлетворяющих, например, краевым условиям (6).

Такая аппроксимация будет иметь вид ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos \pi k \tau + B_k \sin \pi k \tau)$, где коэффициенты A_k и B_k определяются, аналогичными (5), формулами

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau, \quad A_k = \int_{-1}^1 x(\tau) \cos \pi k \tau d\tau \quad \text{и} \quad B_k = \int_{-1}^1 x(\tau) \sin \pi k \tau d\tau \quad k = 1, 2, 3, \dots$$