Тригонометрические ряды Фурье

Рассмотрим набор функций вида

$$\{\ 1, \cos\tau, \sin\tau, \ldots \cos n\tau, \sin n\tau, \ldots \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \tau \in [-\pi, \pi]\ \}. \tag{1}$$

Любую линейную комбинацию этих функций с неограниченным числом слагаемых принято называть *тригонометрическим рядом*.

Совокупность всех тригонометрических рядов является *линейным пространством* относительно стандартных операций сложения функций и умножения числа на функцию

Исследуем возможность представления функции в виде тригонометрического ряда.

Во-первых, иногда такое представление в иде ряда (или в виде его частичной суммы) для периодической функции может находиться однозначно, путем формульных преобразований.

Пример 01. Найти тригонометрический ряд для функции $f(\tau) = \sin^4 \tau$.

Решение: Приведем вид функции $f(\tau)$ к линейной комбинации, использовав дважды формулу удвоения аргумента тригонометрических функций:

$$\sin^4 \tau = \left[\frac{1-\cos 2\tau}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{4}\cos^2 2\tau =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{4}\left[\frac{1+\cos 4\tau}{2}\right] = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{8}\cos 4\tau \ .$$

Рассмотрим более общий метод построения аппроксимации в виде тригонометрического ряда.

Предварительно введем (по определению) понятие *абсолютной интегрируемости функции* $f(\tau)$ *на промежутке* $[a,b]$ *в несобственном смысле.*

Будем говорить, что $f(\tau)$ *абсолютно интегрируема на* $[a,b]$ *в несобственном смысле*, если:

1) существует $\int\limits_a^b |f(\tau)|d\tau$.
2) число особых точек у $f(\tau)$ на $[a,b]$ конечно
и
римановский интеграл от $f(\tau)$ (то есть, $\int\limits_\alpha^\beta f(\tau)d\tau$) существует на любом промежутке, принадлежащем $[a,b]$, не содержащем особых точек.

Заметьте, что здесь предполагается как существование интегралов $\int\limits_a^b f(\tau)d\tau$, так и интегралов $\int\limits_a^b |f(\tau)|d\tau$. Их существование *не равносильно*, например, для функции Дирихле на промежутке: $[a,b]$

$$f(\tau)=\begin{cases} 1, \text{ если } \tau - \text{рациональное,} \\ -1, \text{ если } \tau - \text{ирациональное,} \end{cases}$$

где из абсолютной интегрируемости не следует интегрируемость по Риману.

Затем, превратим линейное пространство тригонометрических рядов в *евклидово пространство*, взяв за *скалярное произведение* на $[-\pi,\pi]$ функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$, билинейную форму

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(\tau)y(\tau)\,d\tau\ .$$

Набор функций (1) в этом случае оказывается *ортогональным*.

Действительно, будут справедливы равенства:

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau\cos m\tau\,d\tau=0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin n\tau\sin m\tau\,d\tau=0, \quad , \quad \forall n\neq m\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau\sin m\tau\,d\tau=0, \qquad \forall n,m\in\mathbf{N}.\end{aligned}\tag{2}$$

\
Кроме того, верны соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\,d\tau=2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\tau\,d\tau=\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 n\tau\,d\tau=\pi, \qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Понятно, что свойства тригонометрических рядов для системы (1) зависят от того, как выбираются коэффициенты в этих рядах. Организуем этот выбор так, чтобы тригонометрический ряд являлся некоторым представлением функции $f(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$.

Рассмотрим конкретный способ выбора коэффициентов тригонометрического ряда. Предположим, что ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\tau+b_n\sin n\tau) \qquad (3)$$

сходится к функции $f(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$ *равномерно*, тогда его коэффициенты находятся из следующих рассуждений.

Это означает, что справедливо равенство $f(\tau)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{л=1}^{+\infty}(a_n\cos n\tau+b_n\sin n\tau)\quad \forall\,\tau\in[-\pi,\pi]$.

Если умножить обе части этого равенства почленно на $\cos m\tau$, а затем проинтегрировать произведение по τ , то в силу (2) получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos m\tau\,d\tau=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos m\tau\,d\tau+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau\cos m\tau\,d\tau+b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin n\tau\cos m\tau\,d\tau\right)\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad a_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du\qquad \forall m\in\{0,\mathbf{N}\}. \tag{4}$$

Аналогично, после умножения на $\sin m\tau$, находим, что $b_m=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du\qquad \forall m\in\mathbf{N}.$

Замена τ на u сделана для удобства записи, поскольку значение определенного интеграла не зависисит от идентификатора (символа) обозначающего переменную интегрирования.

Примем по определению формулы (4) как задающие коэффициенты тригонометричого ряда в случае любой фбсолютно интегрируемой функции $f(\tau)$.

В этом случае получаемый тригонометрический ряд (3) называется *рядом Фурье* для этой функции на $[-\pi,\pi]$.

Оказывается, что сумма ряда Фурье (если она существует) не всегда совпадает тождественно с $f(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$, поэтому принято использовать для сопоставления функции $f(\tau)$ и ее ряда Фурье специальное обозначение:

$$f(\tau) \quad \sim \quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau).$$

Более того, не всякий сходящийся тригонометрический ряд обязательно является рядом Фурье какой-либо функции на $[-\pi,\pi]$.

Как и функциональные ряды других классов, ряды Фурье используются в качестве возможного способа представления (или описания) функции $f(\tau)$. Заметим, что это представление альтернативно представлению этой функции, например, в виде ряда Тейлора. Действительно, разложение в ряд Тейлора выполняется в малой окрестности некоторой точки $\tau_0 \in [-\pi, \pi]$, в то время как ряд Фурье представляет $f(\tau)$ на всем (не малом!) отрезке $[-\pi, \pi]$.

Поэтому первоочередной интерес представляют условия, которые позволяют по свойствам суммы ряда Фурье делать заключения о свойствах самой функции $f(\tau)$.

Опишем эти условия, дав предварительно следующие определения.

> Функцию $f(\tau)$ будем называть *кусочно-непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых у нее существуют конечные односторонние пределы.
>
> Функцию $f(\tau)$ будем называть *кусочно-гладкой на отрезке* $[-\pi, \pi]$, если ее производная кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Во-первых, важное свойство рядов Фурье описывает *лемма Римана об осцилляции*.

Коэффициенты ряда Фурье для любой абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{5}$$

Заметим, что эти формулы могут быть уточнены в случае выполнения дополнительных предположений о свойствах функции $f(\tau)$. См. теоремы C и D.

Во-вторых, справедливы следующие утверждения:

Теорема A. 1) Ряд Фурье для кусочно-гладкой на функции $f(\tau)$ сходится в каждой точке $\tau_0 \in (-\pi,\pi)$ к значению $\dfrac{f(\tau_0+0)+f(\tau_0-0)}{2}$, откуда следует сходимость в точках непрерывности $f(\tau)$ к значению $f(\tau_0)$.

2) В точках $\tau_0 = -\pi$ и $\tau_0 = \pi$ ряд Фурье сходится к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Теорема B. Если $f(\tau)$ имеет на $[-\pi,\pi]$ *непрерывные производные* до порядка $N-1$ включительно, для которых $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \quad \forall k = [0, N-1]$ и *кусочно-непрерывную производную* порядка N, то ряд Фурье сходится *абсолютно и равномерно* к функции $f(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$ и при этом

$$\left| f(\tau) - S_m(\tau, f(\tau)) \right| < \frac{\beta_m}{m^{N-1/2}} \quad \forall \tau \in [-\pi,\pi] ,$$

где $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m = 0$, а $S_m(\tau, f(\tau)) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{m} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau)$ - частичная сумма ряда Фурье (порядка m) для функции $f(\tau)$.

Пример 02. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье 'функции-ступеньки'

$$f(\tau)=\begin{cases}0, \text{ если } -\pi \le \tau \le 0,\\ 1, \text{ если } \quad 0<\tau \le \pi\end{cases}$$

и построить график суммы этого ряда.

Решение: 1. Заметим, что при $n \ge 1$ все $a_n = 0$ в силу $\int\limits_0^\pi \cos n\tau\, d\tau = 0$, в то время как $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi d\tau = 1$.

2. Найдем $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin n\tau\, d\tau = -\frac{1}{\pi n}\cos n\tau \Big|_0^\pi = \frac{1-\cos n\pi}{\pi n} = \begin{cases} 0, \text{ если } n=2k,\\ \frac{2}{\pi n}, \text{ если } n=2k+1.\end{cases}$

3. Тогда, перейдя от индекса n к индексу k, мы получим, что

$$f(\tau) \quad \sim \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\tau\ .$$

4. График *суммы ряда* будет иметь вид

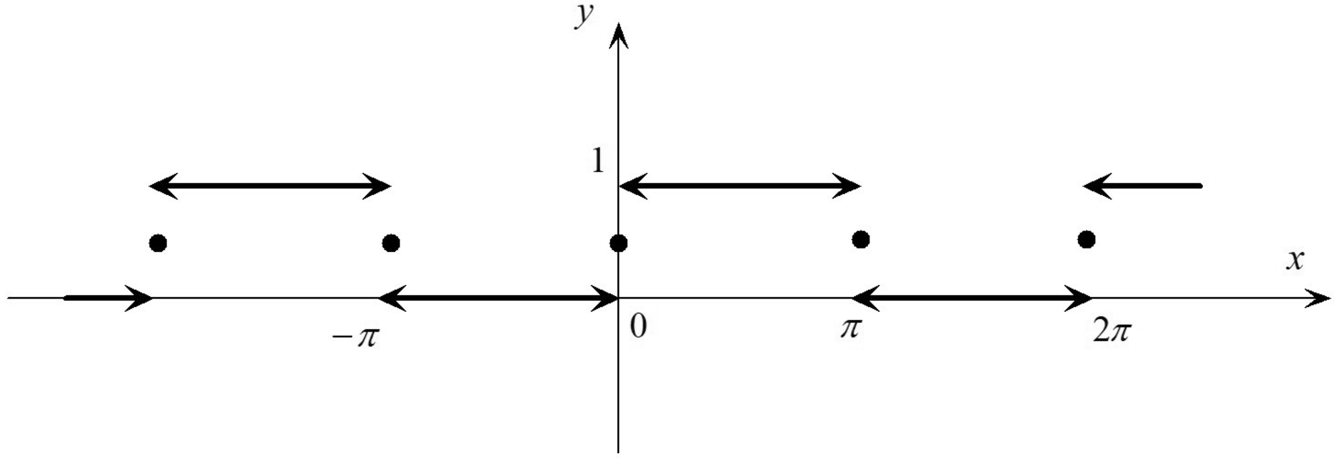


Рис.1.

Следующие рисунки иллюстрируют утверждения теорем A и B.

На рис. 2 показаны две частичные суммы ряда Фурье для функции $f(\tau)=\pi-2|\tau|$, а также график самой функции (выделен черным цветом) на отрезке $[-\pi,\pi]$. При решении примера 04 будет показано, что $f(\tau) \sim \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)\tau}{(2m+1)^2}$.

В этом случае $N=1$. Частичные суммы для $m=0$ (синяя линия) и $m=1$ (красная линия) соответственно имеют вид

$$S_1(\tau,f(\tau))=\frac{8}{\pi}\cos\tau \qquad\qquad S_3(\tau,f(\tau))=\frac{8}{\pi}\cos\tau+\frac{8}{9\pi}\cos3\tau \ .$$

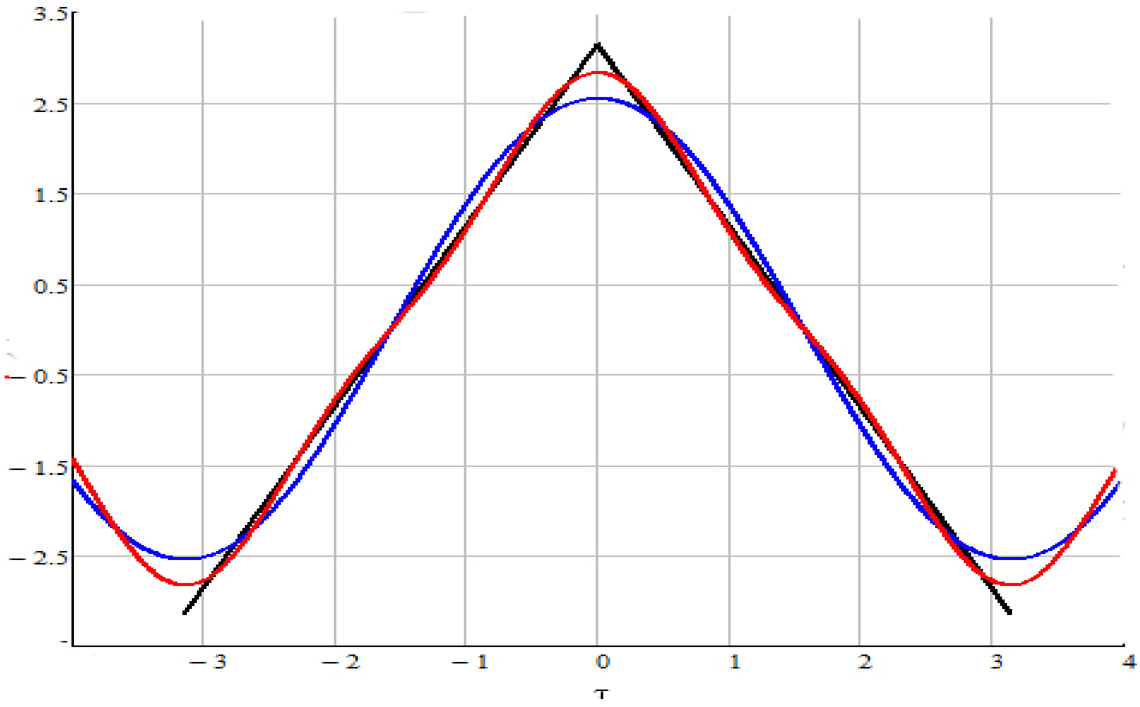


Рис. 2.

На рис. 3 показаны две частичные суммы ряда Фурье для 'функции-ступеньки' $f(\tau)=\begin{cases} 0, \text{ при } -1\le\tau\le 0, \\ 1, \text{ при } \quad 0<\tau\le 1, \end{cases}$ а также график этой функции (выделен черным цветом) на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Из примера 02 имеем $f(\tau) \quad \sim \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\tau$.

В этом случае $N=0$. Частичные суммы порядка 5 (синяя линия) и порядка 29 (красная линия) имеют вид

$$S_{2p+1}(\tau,f(\tau))=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{p}\frac{\sin(2k+1)\tau}{2k+1}\text{, где } p=2 \text{ и } 14 \text{ соответственно.}$$

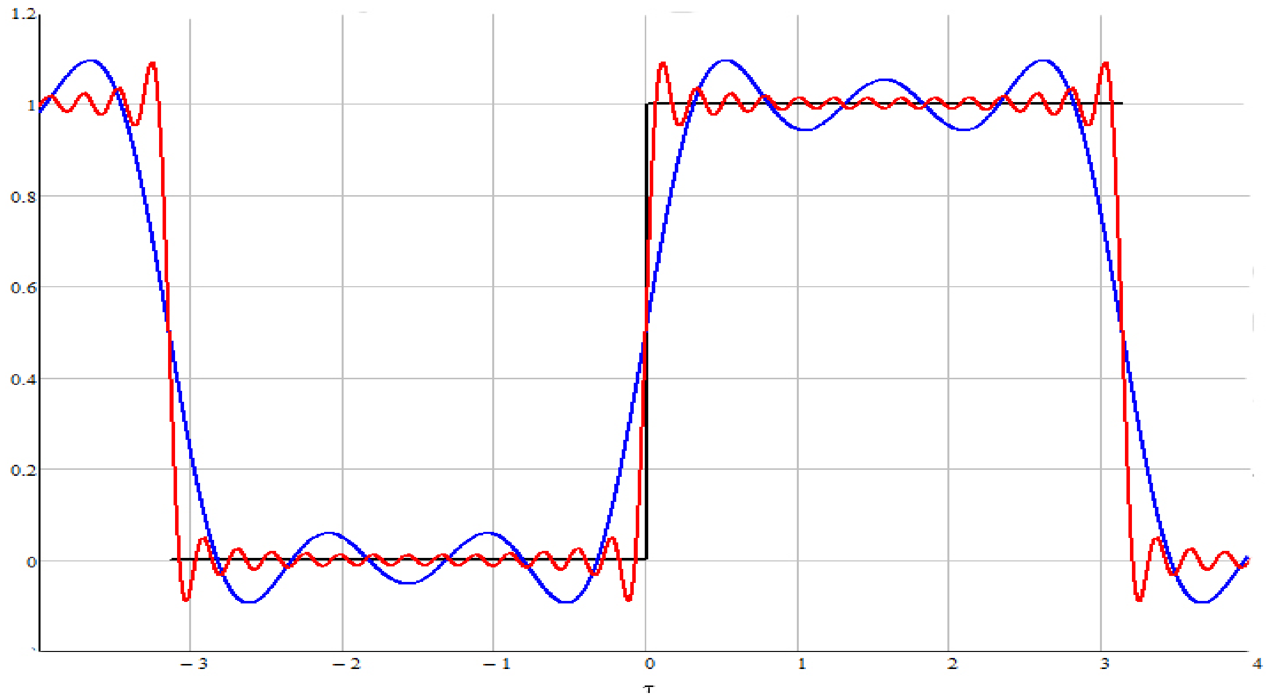


Рис. 3.

Формулы (5) уточняют:

Теорема C: Если $f(\tau)$ имеет период 2π и $f^{(k-1)}(\tau)$ кусочно-гладкая на $[-\pi,\pi]$, то коэффициенты ряда Фурье $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ при $n \to \infty$.

Здесь $k \geq 1$.

Теорема D: Если $f(\tau)$ имеет период 2π и производная $f^{(k-2)}(\tau)$ при $k > 2$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, а $f^{(k-1)}(\tau)$ − кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$, то коэффициенты ряда Фурье $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ при $n \to \infty$.

Заметим, что в теореме D $f^{(k-1)}(\tau)$ не является непрерывной, а $k \geq 2$.

Из теоремы В следует, что не всякий сходящийся тригонометрический ряд есть ряд Фурье какой-то кусочно-непрерывной функции.

Например, ряд $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$ по признаку Дирихле сходится поточечно на $[-\pi,\pi]$, но для его коэффициентов $b_k=\frac{1}{\ln k}\neq O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Пример 03. Оценить порядок стремления к нулю коэффициентов ряда Фурье для функции $f(\tau)=(\tau^2-\pi^2)\sin^2\tau$.

Решение: 1. Данная функция бесконечно дифференцируемая на интервале $(-\pi,\pi)$. Поэтому для возможности ее гладкого $2\pi-$периодического продолжения на всю вещественную ось достаточно выполнения при любом целом неотрицательном k равенства $f^{(k)}(-\pi+0)=f^{(k)}(\pi-0)$.

2. Нам необходимо выяснить, до какого *максимального* k это равенство будет выполняться. Для этого будем последовательно вычислять производные функции $f(\tau)$, находимые. например, при помощи формулы Лейбница, и сравнивать их пределы при $\tau\to\pi-0$ и $\tau\to-\pi+0$.

3. Имеем для $k=0$ $f(-\pi+0)=0=f(\pi-0)$.

При $k=1$

$$f'(\tau)=\tau(1-\cos 2\tau)+(\tau^2-\pi^2)\sin 2\tau .$$

Значит, $f'(-\pi+0)=0=f'(\pi-0)$.

При $k=2$

$$f''(\tau)=(1-\cos 2\tau)+4\tau\sin 2\tau+2(\tau^2-\pi^2)\cos 2\tau .$$

Тогда и $f''(-\pi+0)=0=f''(\pi-0)$.

Если $k=3$, то

$$f^{(3)}(\tau)=6\sin 2\tau+12\tau\cos 2\tau-4(\tau^2-\pi^2)\sin 2\tau .$$

Тогда будет $f^{(3)}(-\pi+0)=-12\pi\neq 12\pi=f^{(3)}(\pi-0)$.

4. Поскольку производные от $f(\tau)$ до порядка 2 непрерывны, а производная порядка 3 кусочно непрерывная, то в силу теоремы D, получаем искомую оценку $a_n, b_n=O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

При практическом использовании рядов Фурье часто возникает потребность получения разложения конкретной функции не по всей ортогональной системе, а по некоторому ее подмножеству.

Пример 04. Найти разложения в ряд Фурье функции $f(\tau)=\pi-2\tau \quad \tau\in(0,\pi]$ по системе

1) четных при $\tau\in[-\pi,\pi]$ функций $\{\,1, \cos\tau, \dots \cos n\tau, \dots \quad \forall n\in\mathbf{N}\,\}$,

2) нечетных при $\tau\in[-\pi,\pi]$ функций $\{\,\sin\tau, \dots \sin n\tau, \dots \quad \forall n\in\mathbf{N}\,\}$.

Построить графики суммы для каждого из этих рядов.

Решение: Основой для решения этой задачи может послужить, следующее из формул (2), утверждение: для *четной* на $[-\pi,\pi]$ функции $f(\tau)$ *все* коэффициенты $b_n \quad \forall n\in\mathbf{N}$ в ряде Фурье (3) *равны нулю*. Аналогично, для нечетной функции все коэффициенты $a_n=0$ для всех неотрицательных целых n.

1. В первом случае доопределим $f(\tau)$ на весь отрезок $[-\pi,0]$ так, чтобы она оказалась четной на отрезке $[-\pi,\pi]$ (см. рис.4а) В этом случае все $b_n=0$.

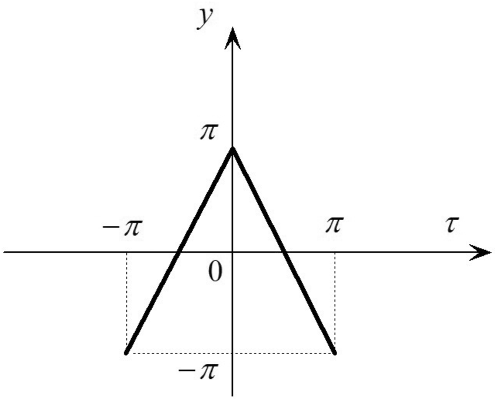


Рис. 4а

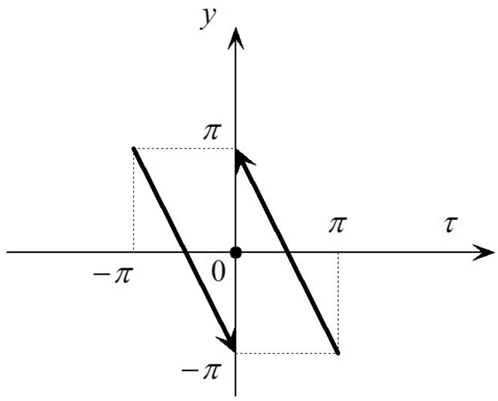


Рис.4в

2. Найдем коэффициенты a_n.

Из рис. 4а по геометрическому смыслу определенного интеграла очевидно, что $a_0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\,d\tau=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-2\tau)\,d\tau=0$.

Для натуральных n имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\cos n\tau\,d\tau=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-2\tau)\cos n\tau\,d\tau=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\pi}\cos n\tau\,d\tau-\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\tau\cos n\tau\,d\tau=$$

$$=\left.\frac{2\sin n\tau}{n}\right|_0^{\pi}-\left[\left.\frac{4\tau\sin n\tau}{\pi n}\right|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin n\tau\,d\tau\right]=$$

$$=-\left.\frac{4\cos n\tau}{\pi n^2}\right|_0^{\pi}=\frac{(-4)(\cos n\pi-1)}{\pi n^2}=\begin{cases}0, & \text{если } n=2m,\\ \dfrac{8}{\pi n^2}, & \text{если } n=2m+1.\end{cases}$$

Окончательно, для искомого ряда получаем $f(\tau)\sim\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)\tau}{(2m+1)^2}$.

График суммы этого ряда показан на рис. 5.

3. Во втором случае доопределим $f(\tau)$ на весь отрезок $[-\pi,0]$ так, чтобы она оказалась нечетной на отрезке $[-\pi,\pi]$ (см. рис.4в) В этом случае все $a_n = 0$.

Найдем b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin n\tau\, d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2\tau)\sin n\tau\, d\tau =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin n\tau\, d\tau - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\tau\sin n\tau\, d\tau =$$

$$= -\frac{2\cos n\tau}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\tau\cos n\tau}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos n\tau\, d\tau\right] =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n} - \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\tau}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m-1, \\ \dfrac{4}{n}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Окончательно, для искомого ряда получаем $f(\tau) \sim 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\tau}{m}$.

График суммы этого ряда показан на рис. 6.

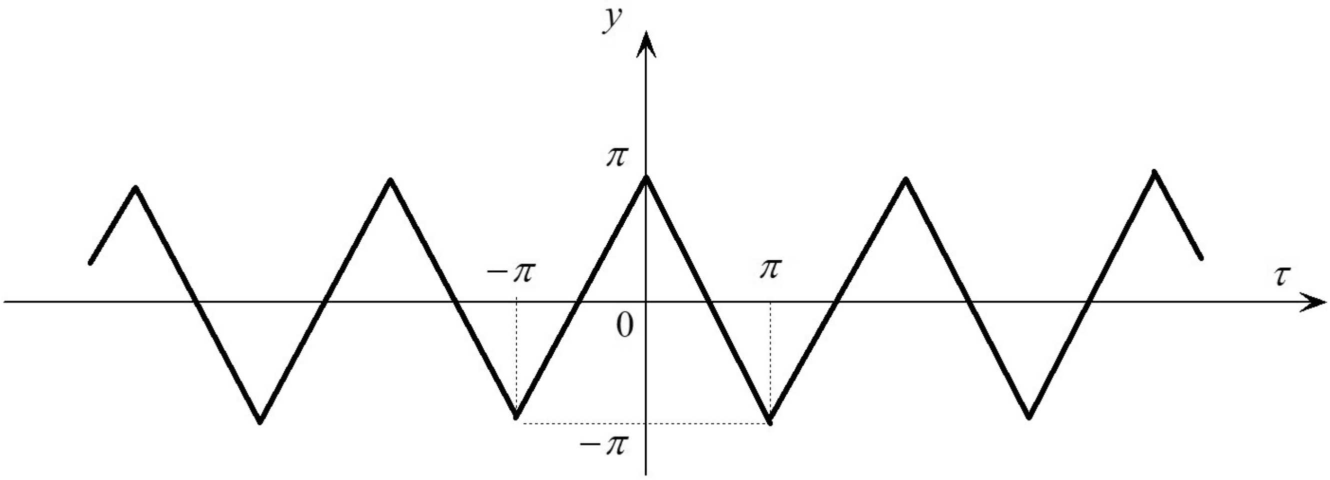


Рис. 5.

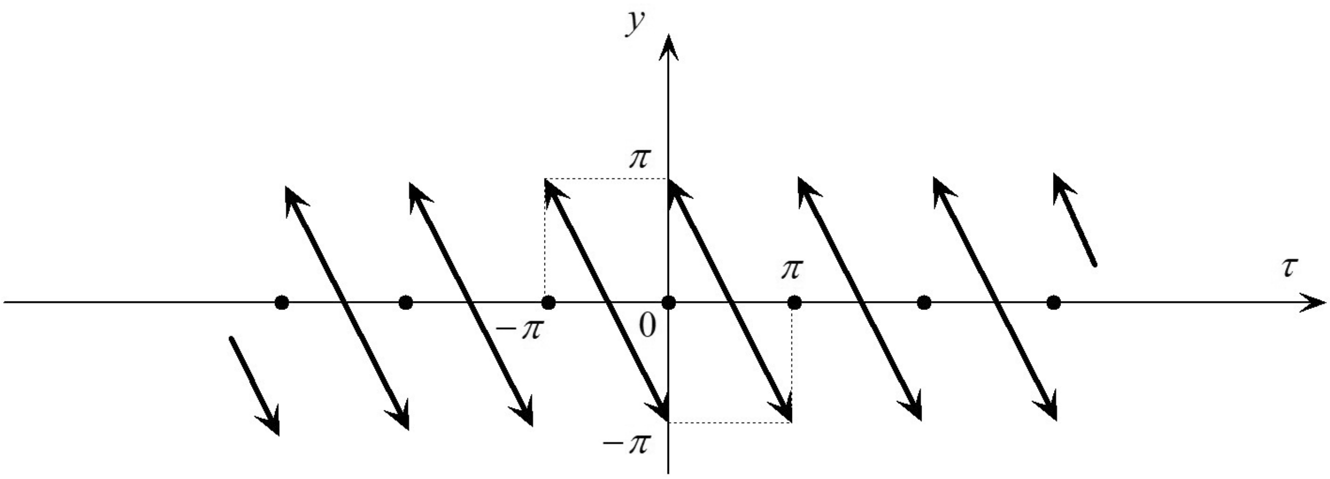
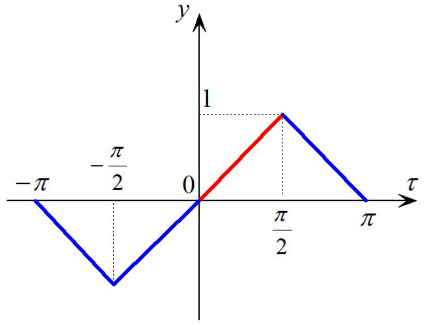
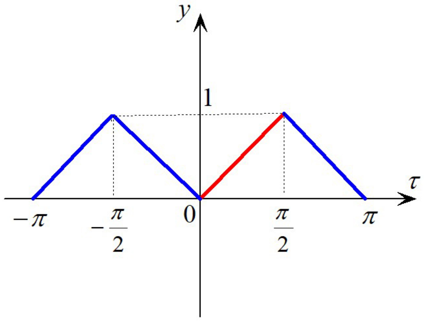
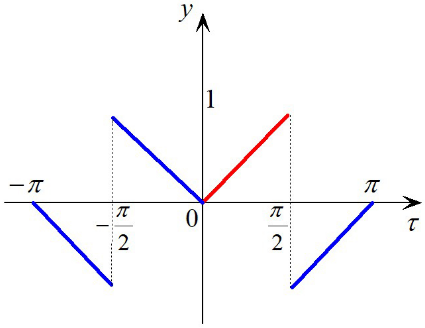
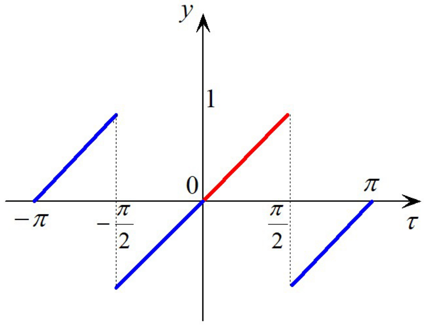


Рис. 6.

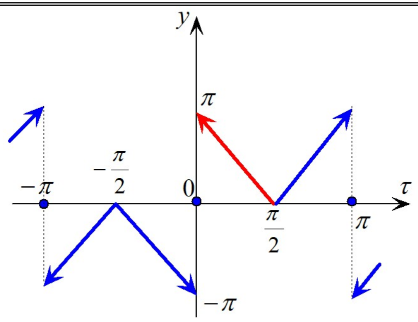
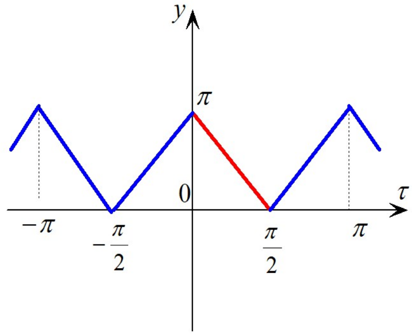
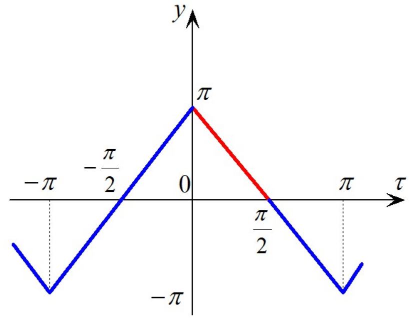
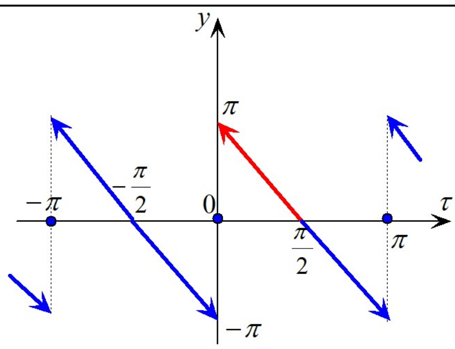
Убедитесь самостоятельно, что теорема D выполняется для обоих случаев.

Более сложным примером являются задачи разложения в ряд Фурье функции $f(\tau)$, определенной на промежутке $\left[\,0,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$, по системам *кратных четных или нечетных дуг*. Способы доопределения этой функции на отрезок $[-\pi,\pi]$, обеспечивающие требуемый вид разложения, показаны в следующей таблице.

Вид системы	**Способ доопределения**
Синусы нечетных кратных дуг $\sin(2n+1)\tau$	
Косинусы четных кратных дуг $\cos 2n\tau$	
Косинусы нечетных кратных дуг $\cos(2n+1)\tau$	
Синусы четных кратных дуг $\sin 2n\tau$	

Пример 04а. Построить аналогичную таблицу вариантов разложения в ряд Фурье функции $f(\tau)=\pi-2\tau \quad \tau\in(0,\frac{\pi}{2}]$ по системам кратных четных или нечетных дуг. Сравните с этой таблицей решения, полученные в примере 4.

Решение:

Вид системы	**Способ доопределения**
Синусы нечетных кратных дуг $\sin(2n+1)\tau$	
Косинусы четных кратных дуг $\cos 2n\tau$	
Косинусы нечетных кратных дуг $\cos(2n+1)\tau$	
Синусы четных кратных дуг $\sin 2n\tau$	

Важным для практики является вопрос: при каких условиях формальное дифференцирование или интегрирование ряда Фурье функции $f(\tau)$ будет ряд Фурье соответственно функции $f'(\tau)$ или $\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(u)\,du$?

Ответ на этот вопрос дают:

Теорема E: Если $f(\tau)$ имеет период 2π и является кусочно-гладкой на $[-\pi,\pi]$, то ее ряд Фурье (3) сходится равномерно к $f(\tau)$ на всей вещественной оси.

Теорема F: Если $f(\tau)$ имеет период 2π и является кусочно-гладкой на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье функции $f'(\tau)$ имеет вид

$$f'(\tau) \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n(-a_n \sin n\tau + b_n \cos n\tau).$$

Теорема G: Если $f(\tau)$ имеет период 2π и кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье для функции $\Phi(\tau) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(u)\,du$ получается формальным интегрированием (3) по переменной τ.

Дополнительные важные теоретические факты

Разложение в ряд Фурье можно выполнять и для функций с периодом $2L$, заданных для $\tau \in [-L, L]$ как $f(\tau)$.

В этом случае ряд Фурье определяется следующим образом

$$f(\tau) \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos\frac{\pi n\tau}{L} + b_n \sin\frac{\pi n\tau}{L}), \tag{6}$$

где $a_m = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{\pi m u}{L}\,du \quad \forall m \in \{0, \mathbf{N}\}$ и $b_m = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{\pi m u}{L}\,du \quad \forall m \in \mathbf{N}$. (7)

Справедливы оценки:

1) Если квадрат функции $f(\tau)$ интегрируем (быть может, в несобственном смысле) на промежутке $[-\pi,\pi]$, то для частичных сумм ряда Фурье верно равенство, называемое *минимальным свойством частичных сумм ряда Фурье*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - S_m(\tau, f(\tau)) \right|^2 d\tau \quad = \quad \min_{\forall T_m(\tau)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - T_m(\tau, f(\tau)) \right|^2 d\tau \,. \tag{8}$$

Минимум в правой части равенства (8) берется по множеству тригонометрических многочленов следующего вида:

$$T_m(\tau, f(\tau)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \,.$$

2) Для коэффициентов ряда Фурье справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\tau)\, d\tau \,. \tag{9}$$

Наконец, отметим возможность представления ряда Фурье в комплексной форме.

Действительно, по формуле Эйлера

$$\cos n\tau = \frac{e^{in\tau} + e^{-in\tau}}{2} \quad \text{и} \quad \sin n\tau = \frac{e^{in\tau} - e^{-in\tau}}{2i},$$

что позволяет ряд (3) записать как $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\tau}$, где

$$c_0 = a_0, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Если ряд (3) является рядом Фурье, с коэффициентами, вычисляемым по формулам (4), то

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du \quad n \in \mathbf{Z} \qquad \Rightarrow \qquad f(\tau) \ \sim \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\tau}.$$

Частичная сумма ряда Фурье и ядро Дирихле.

Функция вида $D_n(\tau) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\tau$ называется *ядром Дирихле*.

Использование формулы $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$ дает

$$D_n(\tau) = \frac{1}{2\sin\frac{\tau}{2}}\left(\sin\frac{\tau}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos k\tau \cdot \sin\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\tau}{2}}\left(\sin\frac{\tau}{2} + \left(\sin\frac{3\tau}{2} - \sin\frac{\tau}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\tau}{2} - \sin\frac{3\tau}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{(2n+1)\tau}{2} - \sin\frac{(2n-1)\tau}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(2n+1)\tau}{2}}{2\sin\frac{\tau}{2}} \qquad \tau \neq 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Для 2π -периодичной, абсолютно интегрируемой функции $f(\tau)$ частичные суммы ее ряда Фурье представимы в виде $S_n(\tau) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(\tau+u)\,du$.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.

Определение Среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье вида $\sigma_n(\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(\tau)$ называется *суммой Фейера* для функции $f(\tau)$.

Среднее арифметическое ядер Дирихле вида $\Phi_n(\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(\tau)$ называется *ядром Фейера* для функции $f(\tau)$.

Будем называть ряд Фурье суммируемым в точке τ методом средних арифметических, если в этой точке существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(\tau)$.

Теорема Н: Если $f(\tau)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то $\sigma_n(\tau)$ сходится равномерно к $f(\tau)$ на $[-\pi,\pi]$.

Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

1) Пусть для *кусочно непрерывной* на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(\tau)$ тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(\tau) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau \right) .$$

Тогда справедливо неравенство Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\tau)\, d\tau \;,$$

из которого может следовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$.

2) Если функция $f(\tau)$ *квадратично интегрируема* на отрезке $[-\pi, \pi]$, то есть, существует $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(\tau)\, d\tau < +\infty$, то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\tau)\, d\tau \;.$$

3) При помощи равенства Парсеваля можно находить суммы некоторых числовых рядов.

Пример 01. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Решение: Ряд Фурье для функции $f(\tau)=\tau$ имеет вид $\tau \sim 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}\sin n\tau$. Здесь все $a_n=0$, а $b_n=2\frac{(-1)^n}{n}$.

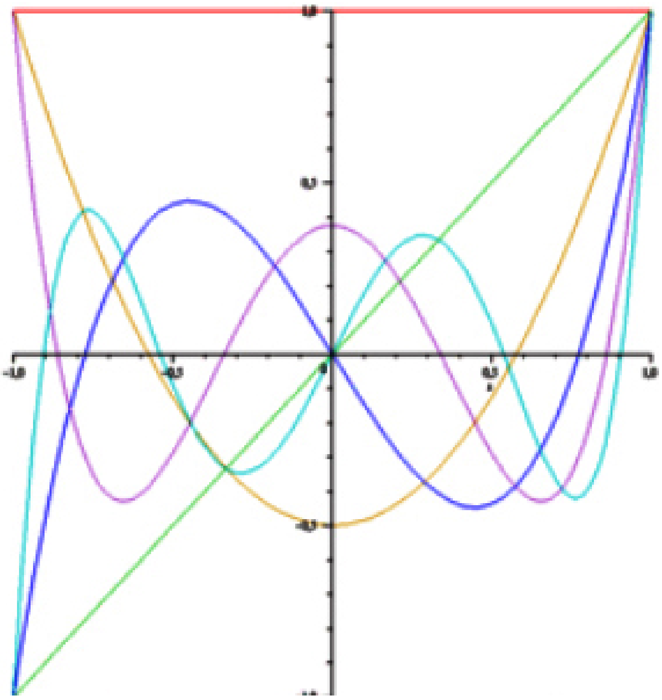
Квадрат $f(\tau)=\tau$ интегрируем на $[-\pi,\pi]$, поэтому верно равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tau^2 d\tau \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

Представлять функции рядом Фурье можно также при помощи других ортогональных систем. Можно показать, что система *полиномов Лежандра*

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n(\tau^2 - 1)^n}{d\tau^n} \quad n \in \mathbf{N}, \tau \in [-1,1] \quad \text{и} \quad P_0(\tau) = 1$$

является ортогональной, если скалярное произведение определено как $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(\tau) y(\tau)\, d\tau$. В этом случае $(P_m(\tau), P_n(\tau)) = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}$ и нормирующий множитель η_n для полинома $P_n(\tau)$ будет равен $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.



\

Пример 05. Найти разложение в ряд Фурье по системе полиномов Лежандра функции
$$f(\tau)=\begin{cases}1, \text{ если } \tau\in[0,1],\\ 0, \text{ если } \tau\in[-1,0).\end{cases}$$

Решение: 1. Пусть искомое разложение имеет вид $f(\tau)\sim\sum\limits_{n=0}^{+\infty}r_nP_n(\tau)$. Нетрудно заметить, что

$$r_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}f(\tau)\,P_0(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{1}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

2. Найдем коэффициенты r_n для $n\geq 1$. Имеем

$$r_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\int\limits_{-1}^{1}f(\tau)P_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\int\limits_{0}^{1}\frac{d^n(\tau^2-1)^n}{d\tau^n}d\tau=$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\left.\frac{d^{n-1}(\tau^2-1)^n}{d\tau^{n-1}}\right|_0^1$$

Вычислим значение выражения $\left.\dfrac{d^{n-1}(\tau^2-1)^n}{d\tau^{n-1}}\right|_0^1$. (10)

В силу правил дифференцирования, при $\tau = 1$ это выражение очевидно равно 0.

Пусть $\tau = 0$. Согласно формуле бинома Ньютона

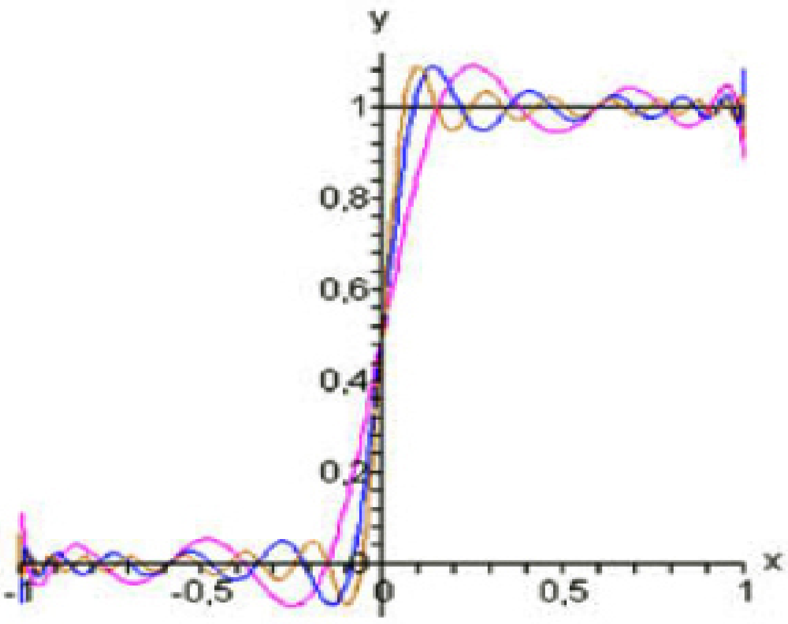
$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}(\tau^2-1)^n}{d\tau^{n-1}} &= \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}\tau^{2n-2k}(-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^{n-k}\left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\tau^{2n-2k}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}(-1)^k(2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n-2k+2)\tau^{n-2k+1}.\end{aligned}$$

Здесь должно быть $n-2k+1 \geq 0$. Для всех таких *четных* n в силу $\tau = 0$ мы получаем, что (10) равно 0. При *нечетных* n, и таких, что $n-2k+1 > 0$, опять-таки это выражение очевидно будет равно 0.

Остается случай нечетного n, для которого $n-2k+1=0$. Заметим, что для каждого $n=2m+1$ всегда есть единственный номер $k=m+1$ такой, что это равенство верное.

Подставив эти значения, получим для (10) значение $C_{2m+1}^{m+1}(-1)^{m+1}(2m)!$. Откуда находим

$$r_m = \frac{1}{2^{2m+1}(2m+1)!}\sqrt{\frac{4m+3}{2}}C_{2m+1}^{m+1}(-1)^{m+1}(2m)! = \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{4m+3}\,(2m)!}{2^{2m+1}\sqrt{2}\,(m+1)!}\ .$$



$n = 5$, $n = 10$, $n = 15$