

Метрические множества и нормированные линейные пространства

Определение 01 Множество $X := \{x, y, z, \dots\}$ называется *метрическим*, если каждой упорядоченной паре его элементов x и y поставлено в соответствие *единственное* неотрицательное число $\rho(x, y)$ такое, что $\forall x, y, z \in X$ выполнены аксиомы:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (*неравенство треугольника*)

В метрическом множестве можно пользоваться определениями *сходящейся* и *фундаментальной* последовательности.

Из сходимости всегда следует фундаментальность, но, не наоборот!

Множество называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого множества.

Определение 02 *Линейное пространство* $X := \{x, y, z, \dots\}$ называется *нормированным*, если *каждому* его элементу x поставлено в соответствие *единственное* неотрицательное число $\|x\|$ такое, что $\forall x, y \in X$ и $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ выполнены аксиомы:

$$1) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \text{ (однородность нормы),}$$

$$2) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ (неравенство треугольника)?}$$

$$3) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o.$$

В нормированном линейном пространстве в качестве метрики можно принять

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Полное нормированное пространство принято называть *банаховым* пространством.

Пример 02. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ суть фундаментальные последовательности в некотором метрическом множестве X . Покажите, что последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ сходится.

Решение: 1) По неравенству треугольника имеем

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

или

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n).$$

Если поменять местами n и m , то получим

$$-\rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n)$$

или

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \geq -(\rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)).$$

Значит,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n).$$

Из фундаментальности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N \rightarrow \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} ; \rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тогда

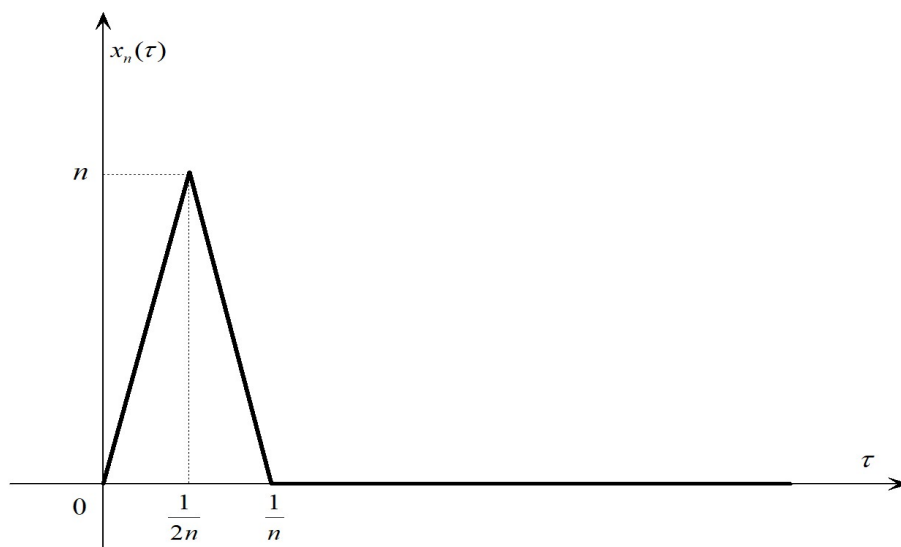
$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Значит, последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ фундаментальна, а поскольку она *числовая*, то она и сходящаяся, по критерию Коши.

Пример 03. Во множестве непрерывных на $[0,1]$ функций $x(\tau)$ функциональная последовательность

$$x_n(\tau) = \begin{cases} 2n^2\tau, & \text{если } \tau \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ 2n(1-n\tau), & \text{если } \tau \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{если } \tau \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

сходится поточечно к функции, тождественно равной нулю (см. рис.).



Но она не будет сходящейся, если метрика задается формулой:

$$\rho(x, y) = \int_0^1 |x(\tau) - y(\tau)| d\tau.$$

поскольку $\rho(x_n(\tau), 0) = \frac{1}{2} n \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \forall n$.

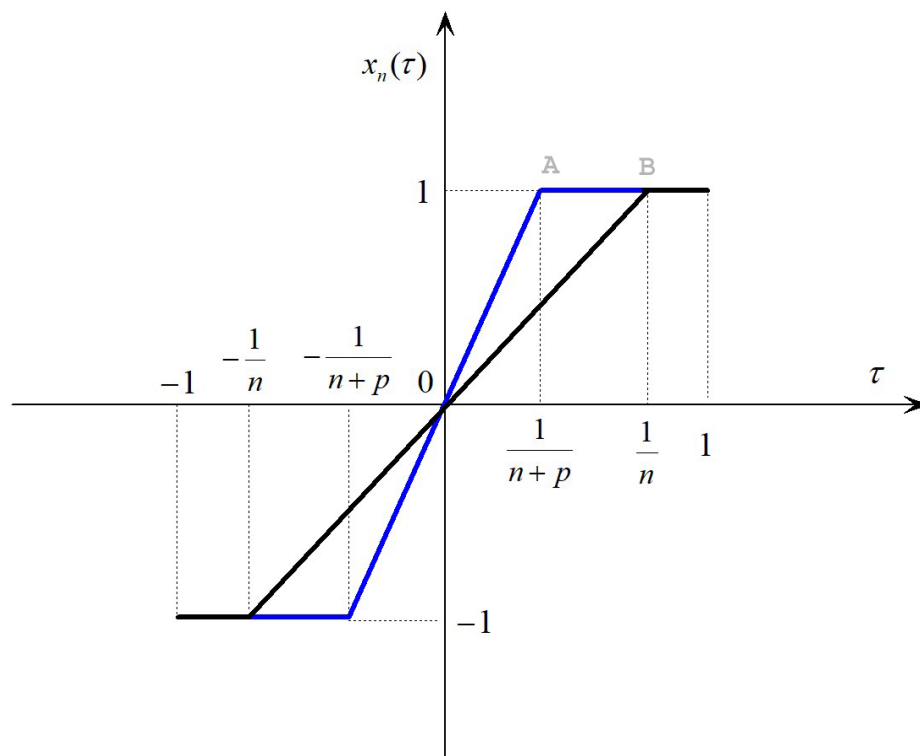
Пример 04. Показать, что линейное пространство, непрерывных на $[-1, 1]$ функций не является полным, если норма определена по формуле

$$\|x(\tau)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2(\tau) d\tau}.$$

Решение: 1) Достаточно показать, что в линейном пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций $x(\tau)$ функциональная последовательность

$$x_n(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{если } \tau \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ n\tau, & \text{если } \tau \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1, & \text{если } \tau \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

фундаментальна, но не сходится к непрерывной функции (см. рис.2).



Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\tau) = \text{sgn } \tau$, которая не является непрерывной.

2) Покажем, что функциональная последовательность $\{x_n(\tau)\}$ фундаментальная.

Получим оценку для квадрата нормы разности функций $x_{n+p}(\tau)$ и $x_n(\tau)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x_{n+p}(\tau) - x_n(\tau)\|^2 &= \int_0^{\frac{1}{n+p}} [(n+p)\tau - n\tau]^2 d\tau + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} [1 - n\tau]^2 d\tau = \\ &= \int_0^{\frac{1}{n+p}} p^2 \tau^2 d\tau + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (1 - n\tau)^2 d\tau = \frac{p^2 \tau^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{n+p}} + \frac{(n\tau - 1)^3}{3n} \Big|_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{p^2}{3n(n+p)^2} \leq \frac{1}{3n}. \end{aligned}$$

3) Другие способы оценки.

А) Пусть $n < m$, тогда

$$\begin{aligned}\|x_n(\tau) - x_m(\tau)\|^2 &= \int_{-1}^1 (x_n(\tau) - x_m(\tau))^2 d\tau = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (x_n(\tau) - x_m(\tau))^2 d\tau \leq \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (|x_n(\tau)| + |x_m(\tau)|)^2 d\tau \leq 4 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} d\tau = \frac{8}{n}.\end{aligned}$$

В) Используйте тот факт, что площадь треугольника OAB равна

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \cdot 1 = \frac{1}{2n} \cdot \frac{p}{n+p} \leq \frac{1}{2n}.$$