

## СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим *определенный* (римановский) интеграл от функции двух переменных  $f(x, \alpha)$ , определенной на замкнутом прямоугольнике  $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$ , который берется по переменной  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ .

Понятно, что значение этого интеграла будет, вообще говоря, зависеть от значения  $\alpha$ , при котором он берется.

Поскольку римановский интеграл по своему определению есть *предел* так называемой *римановской суммы* (и известно, что предел, если существует), то он *единственный*. Поэтому зависимость значения от величины  $\alpha$  является *функциональной*.

Проще говоря, в рассматриваемом случае данный интеграл есть *функция* переменной  $\alpha$  :

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx . \quad (1)$$

Здесь возникает естественный вопрос: как свойства функции  $\Phi(\alpha)$  зависят от свойств функции  $f(x, \alpha)$  ?

Или, более конкретно,

можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией  $\Phi(\alpha)$  (скажем, вычисления предела, дифференцирования или интегрирования по  $\alpha$ ), "переставлять" эту операцию и интегрирование в (1)?

**Ответ:** в общем случае этого делать нельзя.

Поясним это следующим

примером 1. Пусть  $\Phi(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx$ ,  $\alpha > 0$ ,  
требуется найти  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi(\alpha)$ .

Решение: Данный интеграл "берущийся", и из  $\Phi(\alpha) = \arctg \frac{x}{\alpha} \Big|_0^1$  получаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi(\alpha) = \frac{\pi}{2} \text{ С другой стороны, } \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx = 0.$$

Возможность изменения "порядка действий" для операций предельного перехода и вычисления римановского интеграла определяет следующая теорема 1:

Если функция  $f(x, \alpha)$  непрерывна на  $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$ , то  $\Phi(\alpha)$  непрерывна, а значит и интегрируема на  $[c, d]$ .

Следует принять во внимание, что

- непрерывность функции  $f(x, \alpha)$ , как равенства значения и предела в точке, предполагает здесь *двойной (кратный)* предел, что является, с одной стороны, довольно жестким требованием, что и показывает пример 1;
- с другой стороны, выполнение этого жесткого условия позволяет в некоторых случаях находить значения "не берущихся" интегралов.

Пример 2. Найдите  $I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx$ .

Решение: Здесь не получится начать с формулы Ньютона-Лейбница, поскольку соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции.

Однако в силу непрерывности подынтегральной функции двух переменных  $\alpha$  и  $x$ , будут справедливы равенства

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^9 = 4.$$

Пример 3. Найдите  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx$ , где  $b > a > 0$ .

Решение: 1) Заметим, что  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^u du$ . Тогда

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 dx \int_a^b x^u \sin \ln x du . \quad (2)$$

Если доопределить нулями в точках  $a$  и  $b$  подынтегральную функцию внутреннего интеграла, то мы сделаем ее непрерывной (почему?) на множестве  $K : \{ a \leq u \leq b; 0 \leq x \leq 1 \}$ .

Теперь, (по теореме 1) изменив порядок интегрирования, получим, делая подстановку  $x = e^t$  и  $dx = e^t dt$ ,

$$I = - \int_a^b du \int_{-\infty}^0 e^{(u+1)t} \sin t dt .$$

Обозначим через  $J$  внутренний интеграл. Для него (*вспомните материал первого курса*) двукратным последовательным интегрированием "по частям" получается уравнение вида:  $J = -1 - (u+1)^2 J$ , откуда  $J = -\frac{1}{1+(u+1)^2}$ .

Возвращаясь к вычислению интеграла  $I$ , из (2) окончательно получаем

$$I = \int_a^b \frac{du}{1+(u+1)^2} = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1).$$

Условия, определяющие возможность перестановки в римановских интегралах операций дифференцирования и интегрирования, дает теорема 2:

Если в интеграле  $\Phi(\alpha) = \int_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)} f(x, \alpha) dx$  функции  $f(x, \alpha)$ ,  $\lambda(\alpha)$ ,  $\mu(\alpha)$  непрерывно дифференцируемы по  $\alpha$  на  $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$ , то справедливо равенство

$$\Phi'(\alpha) = f(\mu(\alpha), \alpha) \mu'(\alpha) - f(\lambda(\alpha), \alpha) \lambda'(\alpha) + \int_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx. \quad (3)$$

Формула (3) может оказаться полезной при нахождении интегралов.

Пример 4. Применив формулу дифференцирования по параметру  $\alpha$  в интеграле

$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \text{ где } b > 0, \text{ найти интеграл } J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}.$$

Решение: Поскольку в данном случае применима теорема 2, то мы имеем

$$I'_\alpha(\alpha) = -2\alpha J(\alpha). \quad (4)$$

С другой стороны, по правилам интегрирования

$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha},$$

а это дает

$$I'_\alpha(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \cdot \frac{b}{\alpha^2}.$$

И, окончательно, из равенства (4) находим, что

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = J(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha} I'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \frac{b}{\alpha^2 + b^2}.$$