НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим *несобственный* интеграл от функции двух переменных $f(x,\alpha)$

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_a^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \quad , \tag{1}$$

определенной по x на промежутке $a \le x < b$ и при $\alpha \in \Omega$. Значение этого интеграла, вообще говоря, зависит от значения α, при котором он берется. Здесь символ b может означать как вещественное число, так и $+\infty$.

Несобственный интеграл по своему определению есть *односторонний предел* от определенного (римановского) интеграла, когда, например, верхний предел последнего стремится к b слева. Напомним, что в определенном интеграле подынтегральная функция, равно как и промежуток интегрирования, должны быть *ограниченными*. В несобственном интеграле этого не требуется.

В этом случае зависимость значения (1) от величины α является *функциональной*, поскольку предел (римановской интегральной суммы при мелкости разбиения промежутка интегрирования стремящейся к нулю), если существует, должен быть единственным. То есть, интеграл в формуле (1) задает *функцию* от переменной α.

Возникает естественный вопрос: как свойства функции $\Phi(\alpha)$ зависят от свойств функции $f(x,\alpha)$?

Или, более конкретно, можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией $\Phi(\alpha)$ (скажем, вычисляя ее предел, дифференцируя или интегрируя ее по α) "переставлять" эту операцию и интегрирование по x в (1) ?

Мы уже видели, что в общем случае этого делать *нельзя*, даже для определенных (римановских) интегралов (см. пример 1 в теме 5). Но, естественно, представляется интересным выяснить, возможно ли это, и если возможно, то при каких условиях, для несобственных интегралов вида (1).

Чтобы получить ответ на этот вопрос, дадим преварительно два определения:

A) Интеграл (1) называется *поточечно* сходящимся на множестве Ω, если

$$\forall \alpha \in \Omega \quad \text{и} \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta_{\varepsilon,\alpha} > 0 : \ \forall \delta : \ \delta_{\varepsilon,\alpha} < \delta < b \quad \mapsto \quad \left| \int\limits_{\delta}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon .$$

B) Интеграл (1) называется *равномерно* сходящимся на множестве Ω, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \ : \ \forall \alpha \in \Omega \quad \text{и} \quad \forall \delta : \ \delta_{\varepsilon} < \delta < b \quad \mapsto \quad \left| \int\limits_{\delta}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon .$$

Заметим, что, хотя определения A) и B) по тексту похожи, между ними имеется существенная разница.

Первое определение просто означает существование несобственного интеграла для каждого фиксированного $\alpha \in \Omega$.

Согласно этому определению в случае поточечной сходимости имеется правило выбора $\delta_{\varepsilon,\alpha}$ (по заранее заданным значениям ε и α), которое обеспечивает выполнение, указанного в определении, условия. При этом данное правило может быть *разным* для разных значений $\alpha \in \Omega$.

Во втором определении требуется существование правила выбора δ_{ε}, обеспечивающего выполнение, указанного в определении, условия, разом для *всех* значений α из Ω.

Понятно, что второе определение более "жесткое", чем первое. То есть, из *равномерной* сходимости интеграла (1) следует *поточечная*, но не наоборот.

Имеют место следующие утверждения (теоремы).

Теорема 1. Если

1) $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $K:\{\, a \le x < b,\ \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]\,\}$ и

2) интеграл (1) сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$,

то $\Phi(\alpha)$ непрерывна на $[\alpha_1,\alpha_2]$ и справедлива формула

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_{a}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_{a}^{\mapsto b} dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\,.$$

Теорема 2. Если

1) функции $f(x,\alpha)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)$ непрерывны на множестве $K:\{\, a \le x < b,\ \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]\,\}$ и

2) интеграл (1) сходится поточечно на $[\alpha_1,\alpha_2]$, а интеграл $\int\limits_{a}^{\mapsto b} \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$,

то справедлива формула $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(\alpha) = \int\limits_{a}^{\mapsto b} \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx\,.$

Из этих теорем следует важность свойства равномерной сходимости в задачах исследования несобственных интегралов, зависящих от параметра. При этом непосредственное использование определения B) может оказаться весьма трудоемким.

Для решения практических задач в ряде случаев оказываются полезными следующие утверждения:

I. *Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости.*

Интеграл (1) сходится равномерно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{A\to b}\sup_{\alpha\in\Omega}\int\limits_{A}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx = 0\,.$$

II. *Отрицание равномерной сходимости.*

Интеграл (1) не сходится равномерно, если

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \ \text{ и } \ \alpha_0 \in \Omega \ : \ \forall\delta > 0 \quad \exists\xi_0 : \ \delta < \xi_0 < b \quad \mapsto \quad \left|\int\limits_{\xi_0}^{\mapsto b} f(x,\alpha_0)\,dx\right| \ge \varepsilon_0\,.$$

III. *Признак Вейерштрасса* (*достаточное условие равномерной сходимости*).

Если существует A такое, что функция $\phi(x)$, определенная на $[A,+\infty)$, удовлетворяет условиям:

1) $\forall x \in [A,+\infty)$ и $\forall \alpha \in \Omega$: $\left| f(x,\alpha) \right| \leq \phi(x)$,

2) несобственный интеграл $\int\limits_{A}^{\mapsto b} \phi(x)\,dx$ сходится,

то интеграл (1) сходится равномерно на Ω.

IV. *Критерий Коши* (*необходимое и достаточное условие равномерной сходимости*).

Интеграл (1) сходится равномерно, тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta_\varepsilon \in (a,b) \ : \forall \alpha \in \Omega \ \ \forall \delta' \in [\ \delta_\varepsilon, b) \ \text{ и } \ \forall \delta'' \in [\ \delta_\varepsilon, b) \ \ \mapsto \ \ \left| \int\limits_{\delta'}^{\delta''} f(x,\alpha)\, dx \right| < \varepsilon .$$

V. *Отрицание критерия Коши*. Для того, чтобы несобственный интеграл (1) не сходится равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall \delta \in (a,b) : \ \exists \alpha_0 \in \Omega , \ \ \exists \delta_0' \in [\ \delta, b) \ \text{ и } \ \exists \delta_0'' \in [\ \delta, b) \ \ \mapsto \ \ \left| \int\limits_{\delta_0'}^{\delta_0''} f(x,\alpha_0)\, dx \right| \geq \varepsilon_0 .$$

Обратите внимание, что интегралы в **IV** и **V** *определенные* (римановские).

VI. *Признак Дирихле* (*достаточное условие равномерной сходимости*).

Интеграл вида $\int\limits_{A}^{\mapsto b} f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω, если на множестве $x\in[A,b)$ при каждом $\alpha\in\Omega$ функции $f(x,\alpha)$, $g(x,\alpha)$ и $g'_x\ (x,\alpha)$ *непрерывны* по x и удовлетворяют условиям:

1) $\lim\limits_{x\to b} g(x,\alpha)=0$ равномерно по $\alpha\in\Omega$,

2) функция $g'_x\ (x,\alpha)$ знакопостоянна на $x\in[A,b)$ при каждом $\alpha\in\Omega$,

3) $\exists M>0\ \ \forall\alpha\in\Omega$ и $\forall x\in[a,b)\ \ \mapsto\ \ \left|\int\limits_{a}^{x} f(u,\alpha)\,du\right|\le M$.

Основываясь на этих теоретических утверждениях, выполняют исследования несобственных интегралов на сходимость

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha)=\int\limits_A^{\mapsto+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx$ при $A>0$ на множествах: 1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$, где $\alpha_0>0$ и 2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

Решение. 1) Применим критерий **I**. Имеем (проверьте эти равенства самостоятельно)

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\in[\alpha_0,+\infty)}\int\limits_A^{\mapsto+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\in[\alpha_0,+\infty)}e^{-\alpha A}=\lim_{A\to+\infty}e^{-\alpha_0 A}=0\,,$$

то есть, интеграл сходится равномерно.

2) Аналогично,

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha>0}\int\limits_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha>0}e^{-\alpha A}=\lim_{A\to+\infty}e^{-1}=e^{-1}>0\,,$$

поскольку среди положительных α для любого $A>0$ найдется $\alpha_0=\dfrac{1}{A}$.

Следовательно, равномерной сходимости на втором множестве по α нет.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Решение. Из оценки $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\le\phi(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad\forall\alpha\in\mathbf{R}$ по признаку **III** (Вейерштрасса), в силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$, заключаем, что указанный в условии интеграл сходится равномерно по α на $\mathbf{R}$.

Поэтому по теореме 1 (в силу непрерывности по α) будет верно равенство

$$\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{a\to 0}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi .$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}$ на множествах: 1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$, где $\alpha_0>0$ и
2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

Решение. 1) Применим определение В) на стр. 3, которое в данной задаче имеет вид

$$\forall\varepsilon>0\ :\ \exists\delta_\varepsilon>0\ :\ \forall\alpha\in[\alpha_0,+\infty)\quad\text{и}\quad\forall\delta:\ \delta_\varepsilon<\delta<+\infty\quad\mapsto\quad\left|\int\limits_\delta^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}\right|<\varepsilon\,.$$

Нам надо найти правило, по которому для каждого заранее заданного положительного ε можно указать δ_ε, обеспечивающее выполнение этого неравенства.

Воспользуемся тем, что соответствующий неопределенный интеграл берущийся, т.е. равенством $\int\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\alpha x+C$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница (для несобственного интеграла) и свойствам функции $\operatorname{arctg} x$, для любых положительных $\varepsilon, \delta_\varepsilon$ и α будут справедливы соотношения

$$0 < \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg} \alpha\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha\delta_\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\varepsilon}{2} + \pi k\right) \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

В силу периодичности функции $\operatorname{tg} x$, вид δ_ε одинаков для любого целого k, поэтому положим $k = 0$. Тогда для δ_ε имеем

$$\alpha\delta_\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\varepsilon}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \delta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

Наконец (проверьте это самостоятельно), поскольку $\frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\varepsilon}{2}$ при $\alpha\varepsilon < \pi$ монотонно убывает по α, то в качестве искомой зависимости δ_ε от ε можно взять $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha_0}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_0\varepsilon}{2}$. Что и доказывает равномерную сходимость интеграла.

2) Докажем отсутствие равномерной сходимости интеграла отрицанием критерия **V** (Коши), которое в данном случае имеет вид

$$\exists\varepsilon_0>0\ :\ \forall\delta>0:\ \exists\alpha_0>0,\ \exists\delta_0'\ge\delta\ \text{ и }\ \exists\delta_0''\ge\delta\ \mapsto\ \left|\int\limits_{\delta_0'}^{\delta_0''}\frac{dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|\ge\varepsilon_0\,.$$

Подынтегральная функция положительна и монотонно убывает по x. Поэтому справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\delta_0'}^{\delta_0''}\frac{dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|\ge\frac{\delta_0''-\delta_0'}{1+\alpha_0^2\delta_0''^2}=\varepsilon_0\,.$$

При этом последнее равенство верно при следующих *допустимых* (проверьте это!) значениях $\forall\delta>0:\quad \delta_0'=\delta,\quad \delta_0''=\delta_0'+1,\quad \alpha_0=\dfrac{1}{\delta_0''},\quad \varepsilon_0=\dfrac{1}{2}\,.$

Действительно, при данных значениях параметров выполняются равенства

$$\frac{\delta_0''-\delta_0'}{1+\alpha_0^2\delta_0''^2}=\frac{\left(\delta_0'+1\right)-\delta_0'}{1+\left(\dfrac{1}{\delta_0''}\right)^2\delta_0''^2}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0\ ,$$

т.е. неравномерной сходимости нет по отрицанию критерия Коши.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ на множествах: 1) $\alpha\in(-\infty,0)$ и 2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

Решение. 1) Применим признак Вейерштрасса. При любом $\alpha<0$ справедливо неравенство $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx<\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Поскольку последний интеграл сходится, то исходный интеграл на множестве $\alpha\in(-\infty,0)$ сходится равномерно.

2) Для $\alpha\in(0,+\infty)$ на множестве $x>\alpha$ подынтегральная функция положительна и монотонно убывающая по x. Тогда по отрицанию критерия Коши

$$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{e}:\ \ \forall\delta>0:\ \ \exists\alpha_0=\delta\quad \text{и}\quad \exists\delta_0'=\delta+1\ \ \text{и}\ \ \exists\delta_0''=\delta+2\quad\mapsto$$

$$\mapsto\left|\int\limits_{\delta_0'}^{\delta_0''} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx\right|\ge e^{-(\delta_0'-\alpha_0)^2}\left(\delta_0''-\delta_0'\right)=$$

$$=e^{-((\delta+1)-\delta)^2}\left((\delta+2)-(\delta+1)\right)=\frac{1}{e}=\varepsilon_0\ .$$

Что означает отсутствие равномерной сходимости интеграла на множестве $\alpha\in(0,+\infty)$.

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость интегралы $\Phi_1(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ и

$$\Phi_2(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx \quad \text{на множестве: } \alpha\ge\alpha_0>0 \ .$$

Решение. 1) Для исследования интеграла $\Phi_1(\alpha)$ применим признак Дирихле. Интеграл вида $\int\limits_1^{+\infty}f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω, поскольку на множестве $x\in[1,+\infty)$ при каждом $\alpha\ge\alpha_0>0$ функции $f(x,\alpha)$, $g(x,\alpha)$ и $g'_x\ (x,\alpha)$ непрерывны по x и удовлетворяют условиям:

В данном случае $f(x,\alpha)=\sin x$ непрерывна, а $g(x,\alpha)=\frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируема по x. Кроме того, имеем

1º. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$ при $\forall\alpha>0$, а равномерность этого предельного перехода вытекает из очевидного неравенства

$$\frac{1}{x^{\alpha_0}}\ge\frac{1}{x^\alpha}\qquad\forall x\in[1,+\infty),\ \forall\alpha\in[\alpha_0,+\infty).$$

2º. функция $g'_x\ (x,\alpha)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ знакопостоянна на $x\in[1,+\infty)$ при каждом $\alpha\ge\alpha_0>0$,

3º. Наконец, $\left|\int\limits_1^x\sin u\,du\right|=\left|-\cos x+\cos 1\right|\le M=2\qquad x\in[1,+\infty)\forall$ при каждом $\alpha\ge\alpha_0>0$

Значит (по признаку Дирихле) интеграл $\Phi_1(\alpha)$ сходится равномерно.

2). Рассмотрим теперь случай интеграла $\Phi_2(\alpha)$. Здесь не будет выполняться условие 2⁰. Действительно, функция $g_x'(x,\alpha) = -\dfrac{\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{\left(x^\alpha + \sin x\right)^2}$ не является знакопостоянной на $x \in [1, +\infty)$ при $\alpha \in (0,1)$. Иными словами, предельный переход 1⁰ имеет место, но он *немонотонный*. Следовательно, признак Дирихле здесь бесполезен.

Для исследования сходимости $\Phi_2(\alpha)$ применим другой инструмент: формулу Тейлора в сочетании с доказанной ранее в курсе математического анализа теоремы о том, что,

если интеграл $\Phi(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$, где интеграл $Q(\alpha)$ сходится равномерно и абсолютно, то интегралы $\Phi(\alpha)$ и $P(\alpha)$ имеют один и тот же вид сходимости (или расходимости).

При помощи формулы Тейлора при $x \to +\infty$ получаем равенства

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\dfrac{\sin x}{x^\alpha}}{1 + \dfrac{\sin x}{x^\alpha}} = \frac{\sin x}{x^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right).$$

Откуда интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ эквивалентен по характеру сходимости интегралу $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}dx$, поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится (как было показано выше) равномерно по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (докажите это самостоятельно).

Осталось разобраться с видом сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}dx$. Если вспомнить материал 2 семестра, то ответ будет такой:

интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}dx$, (*а, значит, и интеграл* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$)
расходится при $\alpha\le\frac{1}{2}$ и сходится равномерно при $\alpha>\frac{1}{2}$.