ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При решении задач предполагается, что могут быть использованы, как известные из теоретической части курса "Гармонического анализа", следующие (табличные) интегралы:

1°. *Интеграл Дирихле*: $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$, $\quad \alpha \in \mathbf{R}$.

2°. *Интегралы Лапласа*: $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sign}\alpha$, $\quad \alpha \in \mathbf{R}$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

3°. *Интеграл Эйлера−Пуассона*: $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. $\quad \alpha > 0$.

В ряде задач может оказаться полезной *формула Фруллани*:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и для каждого $A>0$ интеграл $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ сходится,

то $\forall a>0$ и $\forall b>0$ верно равенство $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Рассмотрим для иллюстрации следующие задачи.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$.

Решение. Выполним замену переменной $x^3 = u$ и используем значение интеграла Дирихле при $\alpha = 1$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} dx^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Решение. Заметим, что из сходимости интеграла Эйлера-Пуассона следует, что

$$0 < \int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \quad \leq \quad \frac{1}{A}\int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad < \quad \frac{1}{A}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2A}$$

при любом фиксированном $A > 0$.

Поэтому можно применить формулу Фруллани. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad = \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\sqrt{\alpha}\, x\right)^2} - e^{-\left(\sqrt{\beta}\, x\right)^2}}{x} dx \quad = \quad e^{-0^2} \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \quad = \quad \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

.

Пример 3. Вычислить $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x\,dx\,,\ \alpha>0\,.$

Решение. Функция $\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}$ монотонно убывает на $x\in(0,+\infty)$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную. Поэтому $\Phi(\alpha)$ сходится *поточечно* по признаку Дирихле.

Интеграл от $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos x\right)=e^{-\alpha x}\cos x$ сходится *равномерно*, поэтому мы можем использовать равенство (этот интеграл берущийся)

$$\Phi'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos x\,dx=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Откуда получаем

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\alpha^2\right)+C\,.$$

А, поскольку $\Phi(0)=0$, то $C=0$ и окончательно $\Phi(\alpha)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\alpha^2\right)$.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$.

Решение. Рассмотрим параметрический интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx \,, \quad \alpha > 0 \,,$$

который совпадает с исходным при $\alpha = 1$.

Заметим, что $\Phi(\alpha)$ сходится равномерно, поскольку его можно представить в виде

$$\int\limits_0^1 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx \,,$$

где первый интеграл − определенный, взятый от непрерывной функции двух переменных,
а для второго (несобственного) − справедлива оценка

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx \quad \le \quad 2\alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \,.$$

Далее, $\Phi'(\alpha)$ также сходится *равномерно*, поскольку справедлива оценка

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3} = \frac{1-\cos\alpha x}{x^2} \le \frac{2}{x^2}.$$

Наконец, используя интеграл Дирихле, находим

$$\Phi''(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}, \text{ так как } \alpha>0.$$

Теперь. дважды проинтегрировав по α функцию $\Phi''(\alpha)$, получим, что

$$\Phi(\alpha)=\frac{\pi}{4}\alpha^2+\frac{C\pi}{2}\alpha+D.$$

Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Phi(\alpha)=0$, то по непрерывности можно положить $\Phi(0)=0$. Тогда $\Phi(\alpha)=\frac{\pi}{4}\alpha^2$ и значение исходного интеграла есть $\Phi(1)=\frac{\pi}{4}$.

В примере 4 естественно может возникнуть вопрос: а не проще ли было параметризацию интеграла сделать по формуле $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin\alpha x}{x^3}dx$, $\alpha>0$? Какое Ваше мнение на этот счет?