

Преобразование Фурье

Интеграл Фурье имеет многочисленные приложения в задачах механики и физики. При этом также часто оказывается востребованным тесно с ним связанный, комплексно-значный математический объект, называемый *преобразованием Фурье*.

Разберемся вначале, что это такое. Из (4) имеем, $Y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt$.

Тогда, приняв во внимание, что выражение $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt$ есть четная функция по

переменной ω , а выражение $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt$ нечетная, получим

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt \quad \text{и} \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt.$$

Умножим теперь обе части второго равенства на мнимую единицу и затем сложим их почленно.

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \omega(x-t) + i \sin \omega(x-t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу Эйлера.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то $Y(x) = f(x)$ и последнее равенство можно записать в симметричной форме $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$. (5)

Здесь придется сделать "лирическое отступление" и вспомнить, что внешний интеграл в формуле (5) (то есть, интеграл по переменной ω) есть не просто несобственный интеграл с двумя особыми точками $+\infty$ и $-\infty$. Предельный переход в обеих точках мы делали "синхронно", что запрещено по определению в обычном несобственном интеграле. Иначе говоря, тут мы имеем дело с каким-то особым видом несобственных интегралов.

Это различие поясняет

Пример 1. Найти $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

Этот интеграл несобственный, имеющий две особые точки: "+0" и "-0". Для его сходимости необходимо, чтобы он сходилась в каждой из них. Возьмем, например, "+0". Имеем

$$I_{+0} = \int_{\rightarrow+0}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = +\infty$$

Интеграл I_{+0} расходится, значит, расходится и интеграл I . Заметим, что также расходится и интеграл I_{-0} .

Теперь выполним предельный переход в точках "+0" и "-0" "синхронно", используя ту же схему, что и при выводе формулы (4):

$$I_{\gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = 0.$$

Откуда следует, что интеграл сходится.

Чтобы выделить несобственные интегралы такого рода, Коши предложил называть их интегралами *в смысле главного значения* и обозначать символом "v.p." (от фр. *valeur principale*).

Так что, $\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$.

Понятно, что из сходимости несобственного интеграла в обычном смысле следует его сходимость в смысле главного значения, но не наоборот.

\

Для решения практических задач оказалось удобным, исходя из формулы (5), дать

Определение 1. Функция

$$\hat{f}(\omega) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а функция

$$\check{f}(\omega) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

– *обратным преобразованием Фурье*.

Часто также используются обозначения

$$\hat{f}(\omega) = F[f] \text{ и } \check{f}(\omega) = F^{-1}[f].$$

Пример 2. Найти *обратное* преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq u, \\ 0, & \text{при } |x| > u. \end{cases}$$

Решение: Для $\tilde{f}(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{i\omega x} dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\omega u} - e^{-i\omega u}}{2i\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin u\omega}{\omega} \end{aligned}$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение: для $\hat{f}(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= F\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{1+x^2} dx =\end{aligned}$$

в силу четности косинуса и нечетности синуса, а также используя значение интеграла Лапласа, получаем

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}.$$

Свойства преобразования Фурье

Сформулируем (без доказательства) основные свойства преобразования Фурье.

1°. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на \mathbf{R} , тогда $\hat{f}(\omega)$ непрерывная и ограниченная на \mathbf{R} функция у которой $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

2°. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет конечные односторонние производные на \mathbf{R} , тогда $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$.

3°. Линейность преобразования Фурье: если преобразования Фурье от функций f и g существуют, то для любых комплексных λ и μ верно равенство

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

4°. Преобразование Фурье от производной функции: если производные функции $f^{(k)}(x)$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ непрерывно дифференцируемы и абсолютно интегрируемы, то

$$\forall k = [1, n] \quad F[f^{(k)}] = (i\omega)^k F[f].$$

При этом $\exists C > 0$ такое, что $|F[f]| \leq \frac{C}{|\omega^n|}$.

Другими словами, чем *больше* абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем *быстрее* стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

5°. Производная преобразования Фурье: пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функции вида $x^k f(x)$ $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$ абсолютно интегрируемы на \mathbf{R} , тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ есть n раз дифференцируемая на \mathbf{R} функция. При этом

$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)] \quad k = [1, n].$$

Использование свойств преобразования Фурье проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 4. Пусть $f(x) = \frac{1}{1+|x^5|}$. Показать, что

- 1) $\hat{f}(\omega)$ имеет на \mathbf{R} непрерывную производную третьего порядка;
- 2). $\hat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^5}\right)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Решение:

- 1) Достаточные условия интегрируемости (признак сравнения) функции $f(x) = \frac{x^k}{1+|x^5|}$ суть $k = 1, 2, 3$. Значит, по свойству 5^o $\hat{f}(\omega) = F[f]$ имеет производные до третьего порядка включительно.
- 2) Функция $\frac{1}{1+|x^5|}$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и кусочно-непрерывную пятую производную вида $120 \operatorname{sign}(x)$. Тогда из свойства 4^o получаем требуемую оценку.

Пример 5. На множестве $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$ найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – теплопроводности такую, что $u(x, 0) = u_0(x)$.

Решение: введем следующие обозначения: $\frac{\partial u}{\partial t} = u'_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}$. Кроме того, будем предполагать, что функции $u(x, t), u'_x(x, t), u''_{xx}(x, t)$ абсолютно интегрируемы по x на всей вещественной оси при каждом $t \geq 0$. Наконец, также условимся, что $\exists \varphi(x): \forall t \geq 0 \left| u'_t(x, t) \right| \leq \varphi(x)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx < +\infty$. (6)

Основная идея: к обеим частям уравнения $u'_t = u''_{xx}$ применим преобразование Фурье по x , считая t параметром.

Пусть

$$F[u(\omega, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx.$$

Для большей наглядности мы не будем применять свойство 4^o, а используем непосредственно определение преобразования Фурье.

Тогда, проинтегрировав два раза по частям и учтя, что проинтегрированные слагаемые в силу (6) зануляются, получим равенства

$$\begin{aligned} F[u''_{xx}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''_{zz} e^{-i\omega z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u'_z e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u'_z e^{-i\omega z} dz \right) = \\ &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \left(u e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz \right) = -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz = -\omega^2 F[u] \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу сделанных предположений, и, поскольку в преобразованном по Фурье уравнению, ω – параметр, $F[u_t'] = F\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{dF}{dt}$. И таким образом, исходное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (где неизвестным является функция F) вида:

$$\frac{dF}{dt} = -\omega^2 F,$$

общее решение которого есть семейство функций $\hat{f}(\omega, t) = D(\omega)e^{-\omega^2 t}$.

Начальным условием при $t = 0$ в нашей задаче является функция $u_0(x)$, преобразование которой по Фурье – функция $D(\omega)$. Это означает, что $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(z)e^{-i\omega z} dz$.

В итоге получаем, что искомое решение уравнения теплопроводности находится путем применения к функции $\hat{f}(\omega, t)$ обратного преобразования Фурье.

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\omega)e^{i\omega x - \omega^2 t} d\omega, \quad \text{где } D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(z)e^{-i\omega z} dz.$$

Например (проверьте самостоятельно, используя решение задачи §17, №8(2)), что, если $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $\hat{f}(\omega, t) = e^{-\omega^2\left(t + \frac{1}{2}\right)}$. Откуда получается, что

$$u(x, t) = F^{-1}\left[e^{-\omega^2\left(t + \frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+2}}.$$