

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение и основные свойства

В большом числе случаев формулировку физического закона, описание явления или процесса удастся выполнить, используя понятие *функции многих переменных* – правила, устанавливающего *однозначное соответствие* между двумя множествами, первое из которых состоит из конечных упорядоченных наборов чисел – "векторов", а второе – состоит из чисел.

Однако в процессе развития физики выяснилось, что этого инструмента может оказаться недостаточно.

Например, при помощи функций не удастся построить корректное количественное описание $\rho_M(x, r)$ – пространственной *плотности материальной точки с центром в r и конечной массы M* .

С физической точки зрения, из равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_M(x, r) dx = M$ следует *неограниченное возрастание* $\rho_M(x, r)$ при неограниченном приближении x к r , что невозможно.

Об этой "теоретической неприятности" физики знали со времен Ньютона-Лейбница, но особо не расстраивались, поскольку измерить практически можно было *только интеграл от $\rho_M(x, r)$* , а "функция плотности" $\rho_M(x, r)$ для материальной точки физического смысла не имела.

Рассмотрим эту проблему с формальной, математической точки зрения. При этом предположим, что все используемые в записях интегралы имеют смысл, а r – произвольный фиксированный вещественный параметр.

Заметим, что, если пользоваться только понятием "функция", то решения задачи:

$$\text{найти функцию } f(x,r) \text{ такую, что } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,r)\varphi(x)dx = \varphi(r), \quad (1)$$

не существует. Попросту говоря, нет такой функции $f(x,r)$, которая "умела бы делать" то, что требует равенство (1).

Но чем тогда может в принципе являться решение этой задачи?

Равенство (1) каждой допустимой функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие *единственное* число, в данном примере – $\varphi(r)$. Иначе говоря, условие (1) определяет некоторую зависимость, **аргументом** которой является обычная *функция*, в то время как, **значение** этой зависимости есть *число*.

Зависимости такого вида в математике известны. Например,

- каждому из геометрических векторов можно поставить в однозначное соответствие его длину,
- каждой квадратной матрице порядка n можно поставить в соответствие ее детерминант,
- каждой, непрерывной на некотором промежутке вещественной оси функции можно поставить в однозначное соответствие ее определенный интеграл.

Зависимости подобного типа принято называть *функционалами*. Их можно определить, например, так:

будем говорить, что на некотором множестве математических объектов X определен *функционал*, имеющий значения в числовом множестве Y , если задано правило, по которому *каждому* элементу из X поставлено в соответствие *единственное* число из Y .

Общепринятого единообразного обозначения для функционалов нет. Хотя достаточно часто используются функцеподобные формы записи, типа $Y(X)$. Вполне уместные, поскольку в случае, когда X есть числовое (или "векторное") множество, определения функционалов и функций совпадают.

При определении функционалов требования к свойствам множества X могут весьма широко варьироваться в зависимости от рассматриваемой задачи. Воспользуемся этой свободой при определении свойств области определения функционалов, которые могут являться решениями задач вида (1).

Эта область определения, обычно обозначаемая как D , состоит из функций $\varphi(x)$.

Не будем здесь скрывать наших, далеко идущих планов: набор требований, формулируемых ниже, позволит в перспективе строить методы решения задач существенно более серьезных, чем задача (1).

Речь идет о задачах Коши, краевых и смешанных задачах для дифференциальных уравнений *в частных производных второго порядка*, называемых обычно *уравнениями математической физики*.

Сформулируем требования как индивидуально для функций $\varphi(x)$, являющихся функциями одной вещественной переменной, так и для всей их совокупности.

1°. Пусть функции $\varphi(x) \in D$ определены на *всей* вещественной оси и имеют на \mathbf{R} производную *любого* порядка;

2°. $\exists a \geq 0: \forall x: |x| \geq |a| \mapsto \varphi(x) \equiv 0$.

Функции, удовлетворяющие условию 2°, принято называть *финитными*, а, одновременно 1° и 2°, – *основными*.

Пример 1: основной является функция-"шапочка", задаваемая формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{4-x^2}}, & \text{при } |x| < 2, \\ 0, & \text{при } |x| \geq 2, \end{cases} \text{ график которой показан на рис.1.}$$

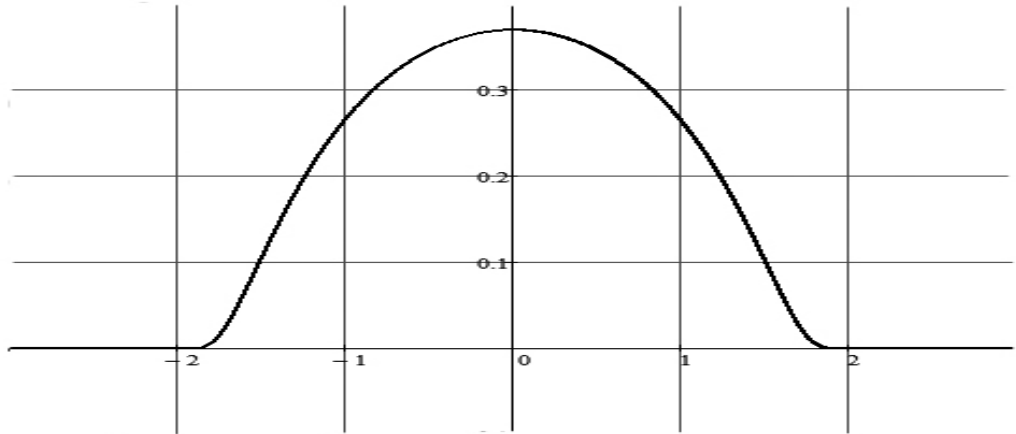


Рис. 1. Пример основной функции.

Нетрудно установить, что множество D является *линейным пространством* со стандартно введенными операциями сложения и умножения числа на элемент.

Определим теперь *сходимость* последовательности $\{\varphi_{(k)}(x)\}$ элементов в D . Символ $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$ будет означать, что на множестве \mathbf{R} имеет место *равномерная по x сходимость* самой последовательности, так и для последовательностей из производных *любого* порядка $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \Rightarrow \varphi^{*(n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$.

Следует отметить, что данное определение сходимости не может быть сведено к использованию какой-либо метрики (см., например, Петрович А.Ю., Ч.3 Стр. 292-293).

Пример 2: последовательность основных функций вида $\varphi_{(k)}(x) = \frac{\varphi^*(x)}{k}$, где $\varphi^*(x)$ – функция-"шапочка", сходится в D при $k \rightarrow \infty$ к функции тождественно равной нулю на множестве всех вещественных чисел \mathbf{R} .

Перейдем теперь к определению функционалов в пространстве D – основных функций.

Назовем *функционалом в пространстве D* правило, по которому каждой основной функции $\varphi(x)$ ставится в соответствие *единственное* число $\mathcal{F}(\varphi(x)) \in \mathbf{R}$.

Заметим также, что функционалы, определенные на D , можно складывать и умножать на число. В результате будут получаться новые функционалы.

Используя свойства пространства основных функций D , среди всевозможных видов функционалов можно выделить специальный класс, элементы которого мы назовем *линейными* и *непрерывными* функционалами. Приведем его определение.

Определение 1.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *линейным* в D , если $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ и $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 \mathcal{F}(\varphi_1) + \lambda_2 \mathcal{F}(\varphi_2) \quad .$$

Определение 2.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *непрерывным* в D , если $\forall \{\varphi_{(k)}\}$ сходящейся к $\varphi^*(x)$ в D , имеет место $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_{(k)}(x)) = \mathcal{F}(\varphi^*(x))$.

Теперь будем рассматривать *только* линейные и непрерывные функционалы в D , которые будем называть, следуя сложившейся традиции, *обобщенными функциями*.

Нетрудно заметить, что *в полной своей совокупности* с операциями сложения функционалов и умножения числа на функционал, обобщенные функции (также как и основные функции) образуют линейное пространство. Его принято обозначать D' .

То, что функционалы называются функциями, нам придется проглотить. Это – традиция, видимо, не слишком удачная.

А вот, прилагательное *обобщенные* наводит на вполне законный вопрос, а что, собственно говоря, рассматриваемые нами функционалы обобщают?

Возвращаясь к задачам вида (1), можно привести следующее объяснение.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая на любом промежутке вещественной оси. Тогда (это теорема!) интеграл вида

$$\mathcal{G}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (2)$$

есть линейный и непрерывный функционал на D . То есть, функционал $\mathcal{G}(\varphi) \in D'$.

То есть, часть функционалов из D' может быть определена по формуле (2) при помощи обычных, абсолютно интегрируемых функций $f(x)$. Такие обобщенные функции будем называть *регулярными*. Все прочие – *сингулярными*.

Это и дает повод использовать термин *обобщенные* для обозначения множества D' – как совокупности регулярных и сингулярных функционалов.

Итак, регулярные обобщенные функции определяются при помощи (2).

Способы же описания сингулярных обобщенных функций могут быть самыми разнообразными, хоть стихами. Рассмотрим

Пример 3: Пусть функционал $\mathcal{F}(\varphi(x))$ ставит в соответствие основной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(a)$ – ее значение в точке $a \in \mathbf{R}$. Показать, что такой функционал $\mathcal{F}(\varphi(x)) \in D'$.

Решение: То, что $\mathcal{F}(\varphi(x)) = \varphi(a) \in \mathbf{R}$ есть функционал на D , – очевидно. Покажем, что он линейный и непрерывный.

Очевидно, что

$$\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)) = \lambda_1\varphi_1(a) + \lambda_2\varphi_2(a) = \lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1(x)) + \lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2(x)).$$

Это доказывает линейность.

Если имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$, то по определению сходимости в D $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \Rightarrow \varphi^{*(n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$. Но это значит, что (в том числе) имеет место и $\varphi_{(k)}(a) \rightarrow \varphi^*(a)$. Откуда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_{(k)}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(a) = \varphi^*(a) = \mathcal{F}(\varphi^*(x)).$$

Таким образом, доказана и непрерывность.

Рассмотренная в примере 3 обобщенная функция имеет специальное наименование. Ее называют – *дельта-функция Дирака* или, просто, *дельта-функция*. Ее стандартное обозначение $\delta_a(x)$.

Важным способом связи между регулярными и сингулярными обобщенными функциями является *предельный переход*, т.е., когда сингулярная обобщенная функция может быть представлена как предел последовательности регулярных функционалов в D' .

Пример 4: Покажем, что в D' для дельта-функции Дирака $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta_0(x)$.

Решение: При любом положительном ε функция $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ будет определять $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi)$ – регулярную обобщенную функцию в D' . Предположим, что в силу финитности, $\exists 0 \leq A < +\infty$ такое, что все $\varphi(x)$ основные функции равны нулю вне отрезка $[-A, A]$. Тогда будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} (\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)) dx = \varepsilon \varphi(0) \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\varepsilon \varphi(0) \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = 2\varepsilon \varphi(0) \int_0^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon \varphi(0)}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{A}{\varepsilon} = 2\varphi(0) \operatorname{arctg} \frac{A}{\varepsilon} \rightarrow \pi \varphi(0).$$

Для второго слагаемого в силу оценки, следующей из теоремы Лагранжа:

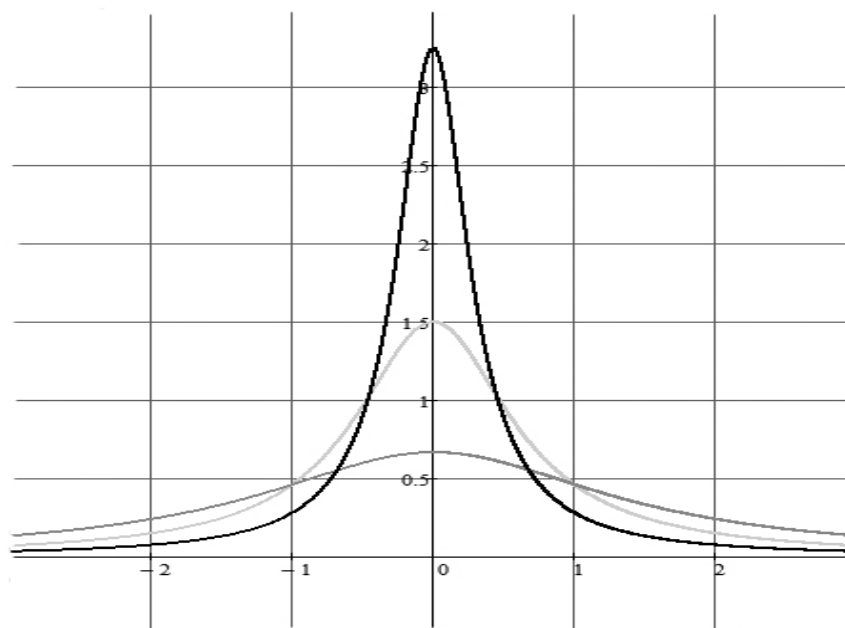
$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x \varphi'(\xi)| \leq |x| \max_{x \in [-A, +A]} |\varphi'(x)| = C|x|$$

получим

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| &\leq \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leq C\varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|x| dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \\ &= C\varepsilon \int_0^{+A} \frac{2x dx}{x^2 + \varepsilon^2} = C\varepsilon \ln(x^2 + \varepsilon^2) \Big|_0^A = C\varepsilon \ln(A^2 + \varepsilon^2) - 2C\varepsilon \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta_0(x)$.

На рис.2 показаны графики $f_\varepsilon(x)$ для различных значений ε .



Теперь обсудим, как принято записывать обобщенные функции. Заметим, что правую часть формулы (2) в регулярном случае можно рассматривать как запись скалярного произведения в некотором евклидовом пространстве, то есть, можно использовать обозначение

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi).$$

Здесь левая скобка и идентификатор функционала как бы "рокировались".

Данное равенство, если распространить его и на сингулярные случаи, позволяет символически обозначать *любые* обобщенные функции символом (f, φ) , где f – идентификатор функционала, а φ обозначает его аргумент – основную функцию.

Заметим, что обратное переобозначение не всегда математически корректно. Например, из символически верного $(\delta_a(x), \varphi) = \varphi(a)$ не следует $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)$, поскольку $\delta_a(x)$ не функция и не имеет конкретного значения в точке x .

Тем не менее, подобные "формулы" можно иногда встретить в информационных ресурсах, использующих такие обозначения для простоты при объяснениях "на пальцах".