Матричные объекты

Определение 1.1.1.	*Матрицей размера* $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, образующие матрицу, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i -ой строке и j -м столбце, как α_{ij}

Определение 1.1.2.	Числа m, n и $m \times n$ называются *размерами матрицы*.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами

$$\alpha_{ij}\,;\ i=[1,m]\ ;\ j=[1,n]$$

или же в развернутой форме:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

Если же потребуется неразвернутое представление матрицы, то мы запишем ее в виде $\|\alpha_{ij}\|$ или просто $\|A\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3.	Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка* n. Матрица размера $m \times 1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1 \times n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\|\alpha_{1j}\|$ или $\|\beta_{i1}\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид $\|\alpha_j\|$ или соответственно $\|\beta_i\|$.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.1.4.	Квадратная матрица, для которой $$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$ называется *симметрической*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают как $\lVert O \rVert$.

Квадратная матрица порядка n вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать $\|E\|$.

Операции с матрицами

Определение 1.1.5.	Две матрицы $\Vert A \Vert$ и $\Vert B \Vert$ считаются *равными* (обозначается: $\Vert A \Vert = \Vert B \Vert$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m]$ и $\forall j = [1, n]$.

Определение 1.1.6.	Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$ (обозначается: $\|C\| = \|A\| + \|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и $$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \ \ \forall i = [1, m], \ \forall j = [1, n],$$ где числа $\gamma_{ij} \ \ \forall i = [1, m], \ \ \forall j = [1, n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Определение 1.1.7.

Матрица $\|C\|$ называется *произведением числа* λ *на матрицу* $\|A\|$ (обозначается: $\|C\| = \lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$ и $\|C\|$ одинаковых размеров и

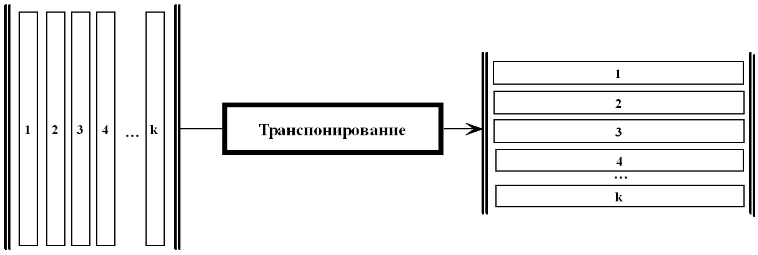
$$\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m], \ \forall j = [1, n].$$

Отметим, что умножать число можно на матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех (или некоторых) элементов матрицы допускается использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение 1.1.8. *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1.1.1).

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^{\mathrm{T}}$.



Для элементов транспонированной матрицы $\|A\|^{\mathrm{T}}$ верно равенство $\alpha_{ij}^{\mathrm{T}} = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m]\,, \forall j = [1, n]$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1 \times m$ в столбец размера $m \times 1$ и наоборот.

Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядков

Для квадратных матриц вводится специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозначаемая как $\det\|A\|$. Описание свойств определителей квадратных матриц n-го порядка будет приведено в главе 6, здесь же мы ограничимся рассмотрением случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Определение 1.1.9. Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 2-го порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ называется число

$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение 1.1.10. Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 3-го порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$ называется число

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

Для определителей квадратных матриц справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.1.1. **Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:**

$$\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} +$$

$$+ \alpha_{13}\det\begin{Vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{Vmatrix},$$

называемой разложением определителя по первой строке.

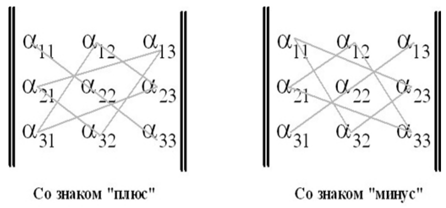


Рис. 1.1.2

2°. Иногда подсчет значения определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить иначе

Следствие 1.1.1. **При транспонировании квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители не меняются.**

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2 (Крамера). **Для того чтобы система линейных уравнений**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Произведение матриц

Определение 5.1.1. Матрица $\|C\|$ размера $m\times n$ с элементами

$$\gamma_{ji} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m]$$

называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m\times l$ с элементами

$$\alpha_{jk}\ \forall j=[1,m],\ \forall k=[1,l]$$

на матрицу $\|B\|$ размера $l\times n$ с элементами $\beta_{ki}\ \ \forall k=[1,l]$, $\forall i=[1,n]$, где

$$\gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\beta_{ki} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m].$$

Результат умножения матриц – матрица $\|C\|$ – есть матрица размера $m\times n$ при любом натуральном l, которая обозначается как $\|C\|=\|A\|\|B\|$. Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует рис. 5.1.1.

$$
\begin{Vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{jl} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml}
\end{Vmatrix}
\begin{Vmatrix}
\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1n} \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2i} & \cdots & \beta_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{li} & \cdots & \beta_{ln}
\end{Vmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{Vmatrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1n} \\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \cdots & \boxed{\gamma_{ji}} & \cdots & \gamma_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mi} & \cdots & \gamma_{mn}
\end{Vmatrix}
\qquad
\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} \beta_{ki}
$$

Рис. 5.1.1

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\| A \| \| B \| \neq \| B \| \| A \|$,

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\| A \| (\| B \| \| C \|) = (\| A \| \| B \|) \| C \|,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности* $\| A \| (\| B \| + \| C \|) = \| A \| \| B \| + \| A \| \| C \|$.

Определение 5.1.2. Матрица $\| A \|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\| A \|$, если выполнены равенства

$$\| A \|^{-1} \| A \| = \| A \| \| A \|^{-1} = \| E \| .$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\| A \|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det \| A \| \neq 0$

.

Определение 5.1.3. Матрица $\| A \|$, для которой $\det \| A \| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det \| A \| \neq 0$, – *невырожденной*.

Лемма 5.1.1. **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

Теорема 5.1.1. **Имеет место соотношение**

$$(\|A\|\|B\|)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}}\|A\|^{\mathrm{T}}.$$

Теорема 5.1.2. **Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо соотношение**

$$(\|A\|\|B\|)^{-1} = \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}.$$

Задача 5.1.1. *Проверить тождество* $(\|A\|^{-1})^{\mathrm{T}} = (\|A\|^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Определение 5.1.4. Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*