Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана *ортонормированная* система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Определение Линия L является *алгебраической линией второго порядка*, тогда ее уравнение в данной системе координат может иметь вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (4.4.1)$$

где числа A, B и C не равны нулю одновременно, а x и y суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей L.

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1 зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно попытаться найти другую ортонормированную систему координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в которой запись уравнения линии оказывается более простой.

Решение этой проблемы дает

Теорема **Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии (при $a \ge b > 0,\ p > 0$) имеет один из следующих девяти (называемых *каноническими*) видов:**

Таблица 1

Тип линии / ***Вид линии***	*Эллиптический* $\Delta > 0$	*Гиперболический* $\Delta < 0$	*Параболический* $\Delta = 0$
Пустые множества	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2 \qquad \forall x'$
Изолированные точки	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
Совпадающие прямые			$y'^2 = 0 \qquad \forall x'$
Несовпадающие прямые		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \qquad \forall x'$
Кривые	*Эллипс* $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Парабола* $y'^2 = 2px'$

где $\Delta = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = AC - B^2.$

Уравнения *касательных* к эллипсу, гиперболе и параболе, проходящих через точку (x_0, y_0), принадлежащую линии, в канонической системе координат имеют вид $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и $yy_0 = p(x + x_0)$.

Следующие задачи иллюстрируют методы исследования свойств линий второго порядка.

Пример 01. На эллипсе $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти все точки, для которых касательная параллельна прямой $x - 2y + 4 = 0$.

Пример 02. На гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ найти все точки, расстояние от которых до одной из асимптот равно утроенному расстоянию до другой.

Пример 03. Выяснить, верно ли утверждение: Касательная к параболе пересекает директриссу и фокальную хорду, перпендикулярную оси параболы, в точках равноудаленных от фокуса. Ответ обосновать.

Верно ли "школьное" доказательство?

Углы GCE и ECF равны по оптическому свойству эллипса и равны α.

Углы ECF и CBF равны α как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Углы DAC и CBF равны α как накрестлежащие при параллельных прямых.

Углы ACF и BCG равны $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Угол HCA также равен $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Тогда в силу $HC = CF$ треугольники AHC и ACF равные,
значит равны α углы DAC и CAF.

Но тогда равны углы CAF и CBF, то есть треугольник ABF равнобедренный и $AF = BF$.

Практическая классификация линий второго порядка

I. Анализ упрощается, если уравнение линии второго порядка имеет специальный вид.

Пример 04. Выяснить тип линии второго порядка (не приводя ее уравнение к каноническому виду) $(x-4y+3)^2+(2x+3y-1)=0.$

Решение. Обозначим $\begin{cases} x' = x-4y+3, \\ y' = 2x+3y-1, \end{cases}$. тогда получим $x'^2+y'=0$. При этом будет $\det\begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = 11 \neq 0,$ значит, эти соотношения могут быть *формулами перехода*. Поскольку при замене системы координат аффинная классификация линий сохраняется, то линия в условии - парабола.

Рассмотрим теперь общий случай линии второго порядка.

Пусть $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad A^2+B^2+C^2\neq 0$.

1) Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать выполненными условия: $B\geq 0$ и $A\geq C$. Действительно, если $B<0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении линии.

Если же $A<C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}_1'=\vec{e}_2$; $\vec{e}_2'=\vec{e}_1$; $\vec{OO'}=\vec{o}$, мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства $x=y'; y=x'$ по правилам построения формул перехода. Заметим также, что при этой замене Δ не меняется, поскольку

$$\det\begin{Vmatrix} C & B \\ B & A \end{Vmatrix}=\det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}=\Delta .$$

2) Поворот вокруг начала координат $\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases}$ приводящий к тому, что слагаемое $2Bxy$ исчезает ($B'=0$), выполняется при условии:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}\ ;\ \alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$$ или, равносильному ему, $\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\alpha-1=0,\ B\neq 0,$

Это дает $A'=\frac{A+C}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4B^2+(A-C)^2}$ и $C'=\frac{A+C}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4B^2+(A-C)^2}$.

Пример 05: В прямоугольной системе координат построить линию второго порядка

$$3x^2+12xy+12y^2-2x+46y+67=0\ .$$

Решение:

1°. Поскольку $B\geq 0$, но $A\leq C$, то делаем замену переменных: $\begin{cases} x=y', \\ y=x'. \end{cases}$ **(A)**

Получим уравнение $12x'^2+12x'y'+3y'^2+46x'-2y'+67=0$.

2°. Делаем поворот системы координат на угол α против часовой стрелки. Причем $0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{4}$.

Формулы этой замены $\begin{cases} x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha, \\ y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha. \end{cases}$

Величину α находим из условия: . $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2B}{A-C} = \dfrac{2\cdot 6}{12-3} = \dfrac{4}{3}$.

Используя формулы: $\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha + 1$ и $\begin{matrix} 1+\cos 2\phi = 2\cos^2\phi \\ 1-\cos 2\phi = 2\sin^2\phi \end{matrix}$,

находим, что $\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\begin{matrix} \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{matrix}$. То есть, $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'', \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y''. \end{cases}$ **(В)**

Поскольку

$$A'' = \frac{A'+C'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A'-C')^2} = \frac{12+3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 6^2 + (12-3)^2} = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{144+81}}{2} = 15 \text{ и}$$

$$C'' = \frac{A'+C'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4B'^2 + (A'-C')^2} = 0\,,$$

то мы приходим к уравнению вида:

$$15x''^2 + \frac{90}{\sqrt{5}}x'' - \frac{50}{\sqrt{5}}y'' + 67 = 0 \quad \text{или} \quad x''^2 + 2\frac{3}{\sqrt{5}}x'' - 2\frac{5}{3\sqrt{5}}y'' + \frac{67}{15} = 0\,.$$

3°. Выделяем полный квадрат: $x''^2+2\frac{3}{\sqrt{5}}x''+\frac{9}{5}-2\frac{5}{3\sqrt{5}}y''+\frac{67}{15}-\frac{9}{5}=0$ или

$\left(x''+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-2\frac{5}{3\sqrt{5}}y''+\frac{8}{3}=0$. Откуда получаем: $\left(x''+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2=2\frac{\sqrt{5}}{3}\left(y''-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

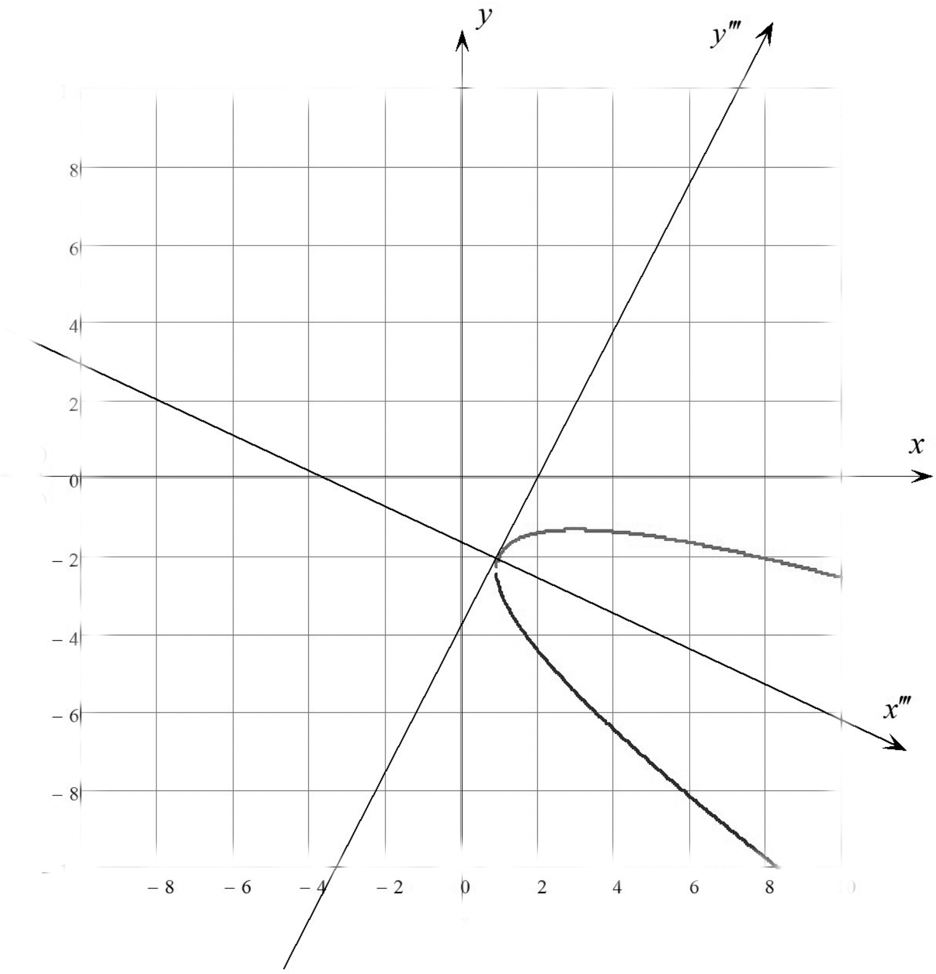
Каноническую форму уравнения нашей линии получим, переименовав оси и сдвинув начало координат, то есть, при замене: . $\begin{cases} x''=y'''-\frac{3}{\sqrt{5}}, \\ y''=x'''+\frac{4}{\sqrt{5}}. \end{cases}$ **(C)**

Эта форма будет иметь вид $y'''^2=2px'''$, то есть это парабола, у которой фокальный параметр $p=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

4°. Найдем итоговые формулы перехода, подставив **(C)** в **(B)** , а результат этой подстановки подставим в **(A)**. Окончательно получим $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y''' + 1, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x''' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y''' - 2\,. \end{cases}$

Это означает, что итоговая матрица перехода $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{matrix} \right\|$, а итоговое начало координат (вершина параболы) будет в точке $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$.

5°. Учитывая, что столбцы матрицы $\|S\|$ суть координатные столбцы базисных векторов $\vec{e}_1\,'''$, $\vec{e}_2\,'''$, а вектор $\vec{e}_1\,'''$ есть направляющий вектор оси параболы, строим эскиз:


y
y'''
x
x'''
8
6
4
2
0
– 2
– 4
– 6
– 8
– 8
– 6
– 4
– 2
0
2
4
6
8