ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Напомним, что по определению *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*, называется выражение вида

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где x - *независимая* переменная, имеющая значения на некотором промежутке X *вещественной* оси. Заданная *непрерывная* функция $f(x, y)$ от векторного аргумента $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \Omega$, где Ω - область в E^2 - двумерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом. Наконец, *искомая* $y(x)$ определенная на X, *комплекснозначная* функция аргумента x, при подстановке в (1) превращает его в тождество.

В это определение необходимо включить дополнительно:

1) условие "согласованности по гладкости", по которому из непрерывности функции $f(x, y)$, в силу (1) следует, что функция $y(x)$, должна быть *непрерывно дифференцируемой.*
2) условие "согласованности множеств X и Ω ", согласно которому $\forall x \in X: \ \left\| \begin{matrix} x \\ y(x) \end{matrix} \right\| \in \Omega$.

Процесс решения уравнения (1), то есть, нахождения всех его частных решений основывается на использовании теорем математического анализа, описывающих дифференциальные свойства функций. Нередко можно встретить фразу: "Известно, что все решения уравнения $y' = \lambda y$ описываются формулой $y(x) = Ce^{\lambda x}$, где - заданное число, а C - произвольная комплексная константа".

Давайте выясним, что стоит за словом "известно", разобрав в деталях (которые обычно опускаются по причине их "очевидно") решение этого уравнения. Отметим сразу, что здесь $X = (-\infty; +\infty)$, а Ω - содержится во множестве комплексных чисел.

Итак:

1) Воспользуемся тем, что производную функцию можно представить как отношение дифференциалов dy и dx. Тогда исходное уравнение будет $\frac{dy}{dx} = y$.
2) Преобразуем его к виду $\frac{dy}{y} = \lambda\, dx$. Заметим, что это преобразование не равносильное. Очевидно, что функция является решением исходного решения, но не удовлетворяет полученному. Запомним это и будем считать, что y не обращается в нуль. По теореме об инвариантности формы первого дифференциала (т.е. вид первого дифференциала не зависит от того, является y функцией или независимой переменной) данное равенство можно записать так: $d \ln|\, y \,| = d(\lambda x)$.
3) Если дифференциалы двух функций равны, то, как следует из соответствующей теоремы, сами функции отличаются на произвольную константу. Можно было бы обозначить эту константу одной буквой, но мы будем считать, что она равна $\ln D$, где D - произвольное, строго положительное число. Таким образом,

$$\ln|y| - \ln D = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{D}\right| = \lambda x \quad \Rightarrow \quad |y| = De^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y = \bar{D}e^{\lambda x},$$

где $\bar{D}$ любое не равное 0 число.

5) Наконец, вспоминая, что также решение исходного уравнения, приходим к формуле $y = Ce^{\lambda x} \quad \forall C \in \mathbf{R}$.

Теперь рассмотрим некоторые частные виды уравнений $y' = f(x, y)$, которые можно интегрировать в квадратурах. Напомним, что термин *интегрирование в квадратурах* означает возможность получения решения в форме суперпозиций элементарных функций и римановских (определенных) интегралов с переменными пределами интегрирования.

Примеры: уравнение $y' = e^{x^2}$ имеет решение, записанное в квадратурах, вида $y(x) = \int_C^x e^{u^2}\,du$. В то время как, уравнение $y' = y^2 + x$ в квадратурах не решается.

УРАВНЕНИЯ С РАДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнения вида

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{2}$$

принято называть *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Они всегда решаются в квадратурах по следующей двухэтапной схеме:

1) Решаем уравнение $g(y) = 0$. Пусть его корнями оказываются числа: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots$. Проверяем, являются ли функции частными решениями уравнения (2)

2) Теперь считаем, что $g(y) \neq 0$ и решаем уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$, приводя его к виду $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$. Последнее уравнение интегрируется в квадратурах. Т.е. решения имеют вид $\int_A^y \frac{dy}{g(y)} = \int_B^x f(x)\,dx + C$, где константы A и B фиксированные, а C - произвольная.

Пример 1. Решить уравнение $yy'\cos x = (1-y)\sin x$.

Решение: 1) Заметим, что $y(x) = 1$ - решение этого уравнения, а условие $\cos x = 0$ решений не дает.

2) Теперь, разделив переменные, получим уравнение $\frac{y}{1-y}dy = \frac{\sin x}{\cos x}dx$.

3) В левой части функцию раскладываем на простейшие дроби, а в правой образуем полный дифференциал. Получаем с учетом изменения знаков

$$(1+\frac{1}{y-1})dy = \frac{d\cos x}{\cos x} \quad \text{или} \quad dy + \frac{d(y-1)}{y-1} - d\ln|\cos x| = 0 .$$

4) Откуда при $D > 0$

$$y + \ln|y-1| = \ln|\cos x| + \ln D \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left|\frac{D\cos x}{y-1}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{D\cos x}{y-1}\right| = e^{y} .$$

5) Наконец, вспоминая, что $y(x) = 1$ - также частное решение, получим ответ: $y - 1 = Ce^{-y}\cos x \quad \forall C \in \mathbf{R}$.

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

К однородным уравнениям относятся уравнения вида $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Эти уравнения приводятся к случаю разделяющихся переменных заменой $y(x) = xu(x)$. Действительно, в этом случае $y' = (xu)' = u + xu'$ и уравнение относительно новой неизвестной $u(x)$ принимает вид $u + xu' = F(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = F(u) - u$, где переменные разделяются.

Скажем, надо решить уравнение $y' = \frac{2x+3y}{x+y}$. Делим в правой части числитель и знаменатель на x, делаем замену $u = \frac{y}{x}$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u + xu' = \frac{2+3u}{1+u} \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx} = 2 - u + \frac{u}{1+u}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейными уравнениями первого порядка называются уравнения вида:

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{3}$$

В уравнении (3) функции $a(x)$ и $b(x)$ известные, *непрерывные* и, вообще говоря, *нелинейные*. Термин линейный относится в этом уравнении только к неизвестной функции и ее производной. В случае, если $b(x) = 0$, уравнение (3) будем называть *однородным*, иначе - *неоднородным*. Покажем, что уравнение (3) всегда разрешимо в квадратурах.

Вначале воспользуемся теоремой, о том, что

Общее решение неоднородного уравнения (3) равно общему решению однородного плюс частное решение неоднородного.

Однородное уравнение имеет вид

$$y'+a(x)y=0\,. \tag{4}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно

$$\frac{dy}{dx}=-a(x)y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y}=-a(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad y(x)=C\exp\left(-\int_{\alpha}^{x}a(u)\,du\right) \quad \forall C\in\mathbf{R}\,. \tag{5}$$

Здесь C любое, поскольку $y=0$ есть также частное решение однородного уравнения. Интеграл в последней формуле существует, поскольку функция $a(x)$ непрерывная.

Для того чтобы получить общее решение неоднородного уравнения, осталось найти частное решение неоднородного. Заметим, что это частное решение может быть любым.

Обозначим экспоненту в формуле (5) как $y_0(x)$. Тогда, согласно рекомендации Ж.Лагранжа, $y^*(x)$ - частное решение (3) - можно искать в виде $y^*(x)=C(x)y_0(x)$, где - некоторая неизвестная функция. Действительно, поставив $y^*(x)$ в (3), получим:

$$(Cy_0)'+aCy_0=b \quad \Rightarrow \quad C'y_0+Cy'_0+aCy_0=b \quad \Rightarrow \quad C'y_0+C(y'_0+ay_0)=b$$

В последнем равенстве выражение в скобках равно нулевой функции, поскольку $y_0(x)$ - частное решение уравнения (4). Таким образом

$$C'(x)=\frac{b(x)}{y_0(x)} \quad \Rightarrow \quad C(x)=\int_\beta^x \frac{b(u)}{y_0(u)}du \quad \Rightarrow \quad y^*(x)=y_0(x)\int_\beta^x \frac{b(u)}{y_0(u)}du\ .$$

Окончательно, формула общего решения неоднородного уравнения (3) будет

$$y(x)=Cy_0(x)+y_0(x)\int_\beta^x \frac{b(u)}{y_0(u)}du \quad \forall C\in\mathbf{R},$$

где $y_0(x)=\exp\left(-\int_\alpha^x a(u)\,du\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $y' + \operatorname{tg} x\, y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение: 1) Решим вначале однородное уравнение $y' + \operatorname{tg} x\, y = 0$.
Заметим, что есть очевидное решение $y = 0$.

2) Если $y \neq 0$, то $\dfrac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx$. Или

$$d \ln |\, y \,| = \frac{d \cos x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad d \ln |\, y \,| = d \ln |\cos x| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln |\, y \,| = \ln |\cos x| + \ln D \quad \Rightarrow \quad |\, y \,| = D |\cos x|, \quad D > 0.$$

Откуда, $y = C \cos x \quad \forall C$ ..

3) Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянной.

Пусть это решение имеет вид: $y^*(x) = C(x)\cos x$. Тогда

$$C'\cos x - C\sin x + \operatorname{tg} x C\cos x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x,$$

Значит, $y^*(x) = \operatorname{tg} x \cos x$ и, окончательно, $y^*(x) = \sin x$

Общее решение: $y = C\cos x + \sin x \quad \forall C$.

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнением Бернулли называется нелинейное уравнение вида:

$$y' + a(x)y = b(x)y^p \quad . \tag{6}$$

где p - параметр.

Это уравнение сводится к линейному 1-го порядка, а, значит, интегрируется в квадратурах для любых непрерывных функциях $a(x)$ и $b(x)$.

Заметим вначале, что при $p = 0$ и $p = 1$ уравнение (6) линейное. И при $p > 0$ уравнение (6) умеет решение $y(x) = 0$.

При $p \neq 0$, $p \neq 1$ и $y(x) \neq 0$ имеем $\frac{y'}{y^p} + a(x)\frac{1}{y^{p-1}} = b(x)$. Введя новую неизвестную функцию $u = \frac{1}{y^{p-1}}$, с $u' = (1-p)\frac{y'}{y^p}$ придем к линейному уравнению первого порядка

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x).$$

Пример 3. Решить уравнение $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

Решение. 1) Заметим, что для данного уравнения $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Поэтому его можно записать в виде $\frac{dx}{dy} = (-\frac{1}{y})x + (2\ln y)x^2$ и искать решение как функцию $x(y)$.

2) Это - уравнение Бернулли с $p = 2$. Поэтому делаем замену . $u(y) = \dfrac{1}{x(y)}$ и получаем линейное уравнение 1-го порядка

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = -2\ln y\,. \qquad (7)$$

3) Однородное уравнение решаем методом разделения переменных

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u(y) = Cy\,.$$

4) Неоднородное решаем методом вариации постоянной. Ищем решение в виде $u^*(y) = C(y)y$.

Если подставить эту формулу в неоднородное уравнение (7), то получим

$$C'y + C - \frac{Cy}{y} = -2\ln y \qquad \Rightarrow \qquad C' = -\frac{2}{y}\ln y \qquad \Rightarrow \qquad C(y) = -\ln^2 y.$$

Значит $u^*(y) = C(y)y = -y\ln^2 y$.

5) В итоге, общее решение неоднородного будет $u(y) = Cy - y\ln^2 y$.

И, если вернуться к исходным переменным, то получим

$$\frac{1}{x(y)} = Cy - y\ln^2 y \qquad \Rightarrow \qquad xy(C - \ln^2 y) = 1.$$