ЗАДАЧА КОШИ. МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ.

Достаточное условие существования и единственности задачи Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

имеет следующую формулировку.

> Пусть в области G уравнение функция f и ее частные производные по переменным $\{y, y', \dots, y^{(n-1)}\}$ *непрерывны* и точка $\{x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\} \in \operatorname{int} G$. Тогда при начальных условиях
> $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$
> уравнение (*) локально имеет единственное решение.

Рассмотрим уравнение $y' = x^2 + y^3$. Предположим, что интегральные кривые двух частных решений этого уравнения проходят через одну и ту же точку $\{x_0; y_0\}$. Тогда, в силу однозначности функции *f*, $y'_1(x_0) = y'_2(x_0)$ и эти кривые пересекаться не могут. Они также не могут и касаться друг друга, поскольку в этом случае решения задачи Коши должны совпадать в некоторой окрестности точки $\{x_0; y_0\}$.

Пусть для уравнения $y'' = x^2 + y^3$ частные решения задачи Коши как с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = a_1$, так и с $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = a_2$ существуют и единственны. При $a_1 \neq a_2$ эти решения различны, а при $a_1 = a_2$ они совпадают. Поэтому *различные* частные решения уравнения могут пересекаться, но не могут касаться друг друга.

Аналогично можно показать, что различные частные решения уравнения $y''' = x^2 + y^3$ могут касаться друг друга.

Продолжение решения задачи Коши.

Задача 01 Доказать, что решение задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ может быть продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$.

Доказательство.

Поскольку $f(x, y) = x - y^2$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ непрерывны на всей плоскости, то они будут непрерывны и в области D: $\{\, y^2 \le x,\ y \ge 0 \,\}$. Значит, в малой окрестности любой точки этой области задача Коши будет иметь решение.

В области D $y' \ge 0$, то есть $y(x)$ − решение исходной задачи Коши, неубывающая функция. Тогда из начального условия $y(1) = 0$ следует, что продолжение этого решения может быть либо продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$, либо достигает границы $x = y^2$ в некоторой точке $x_0 > 1$, из которой продолжение решения не возможно.

Покажем, что второй случай не будет иметь места. Действительно, в любой точке $x_0 > 1$ мы имеем, что $y(x_0) = \sqrt{x_0}$ и $y'(x_0) = 0$, и поэтому из нее возможно продолжение «во внутрь» D.

Следовательно, решение исходной задачи Коши может быть продолжено на полуинтервал $[1, +\infty)$.

Зависимость решения задачи Коши от параметров

Рассмотрим задачу Коши вида: для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \qquad \text{(Задача } \boldsymbol{A}\text{)}$$

при некотором $\lambda = \lambda_0$ найти частное решение $y^*(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию $y^*(x_0, \lambda) = a(\lambda)$.

Если функции f и a непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то решение $y^*(x, \lambda)$ задачи Коши ($\boldsymbol{A}$) имеет непрерывную производную по параметру λ. При этом функция $u(x) = \frac{dy^*}{d\lambda}$ удовлетворяет уравнению (называемым иногда *уравнением в вариациях*)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \qquad \text{(Задача } \boldsymbol{B}\text{)}$$

и условию $u(x_0) = \frac{da}{d\lambda}$. Значения частных производных в этом уравнении берутся при $\lambda = \lambda_0$ и $y = y^*(x, \lambda_0)$.

Замечания:

1) Как находить решение задачи Коши $y^*(x, \lambda_0)$ − вообще говоря, непонятно, но мы будем предполагать, что оно известно или очевидно.

2) Полезные частные случаи задачи $\boldsymbol{B}$:

Если f не зависит от λ и $a(\lambda) = \lambda$, то задача $\boldsymbol{B}$ упрощается и принимает вид:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u \quad \text{при условии } u(x_0) = 1.$$

Если же a не зависит от λ, то вид задачи $\boldsymbol{B}$ таков:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad \text{при условии } u(x_0) = 0.$$

Задача 02 Для задачи Коши $y' = y + y^2 + xy^3 \qquad y(2) = \lambda$

найти $\dfrac{dy}{d\lambda}$ при $\lambda = 0$.

Решение.

В данном случае очевидно, что исходная задача Коши имеет при $\lambda = 0$ и $x_0 = 2$ очевидное решение $y^*(x_0, \lambda) \equiv 0$.

Уравнение в вариациях будет иметь вид: $\dfrac{du}{dx} = (1 + 2y + 3xy^2)u$,

а задача $\boldsymbol{B}$, поскольку $y^*(2{,}0) = 0$, $\dfrac{du}{dx} = u$ при условии $u(2) = 1$.

Решение последней дает $u(x) = e^{x-2}$.

Задача 03 Для задачи Коши

$$y' = y + \lambda(x^2 + y^2) \qquad y(0) = 0$$

найти $\dfrac{dy}{d\lambda}$ при $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Решение.

В данном случае $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = x^2 + y^2$. Поэтому уравнение в вариациях будет

$$\frac{du}{dx} = (1 + 2\lambda y)u + x^2 + y^2, \quad \text{где } u = \frac{dy^*}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Решение задачи Коши для исходного уравнения при $\lambda = 0$ очевидно

$y* = Ce^x$ при $C = 0$ есть $y*(x) = 0$.

Подставляем это в (1) и получаем задачу Коши, $\dfrac{du}{dx} = u + x^2 \qquad u(0) = 0$, (2)

решение которой есть искомая производная $u = \dfrac{dy^*}{d\lambda}$.

Решаем полученную задачу Коши, находим из общего решения неоднородного уравнения (2) $u(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$, что при $u(0) = 0$, должно быть $C = 2$.

Значит, при $\lambda = 0 \qquad u(x) = \dfrac{dy^*}{d\lambda}(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.

Задача 04 Решить уравнение $y = xy' - x^2 (y')^3$, при условии $y' > 0$.

Решение: Используем метод введения параметра.

1) Составляем вспомогательную систему: $\begin{cases} y = xp - x^2 p^3 \\ dy = pdx \end{cases}$

2) Строим полные дифференциалы для обеих частей первого уравнения

$$dy = pdx + xdp - 2xp^3 dx - 3x^2 p^2 dp$$

Подставляем dy из второго уравнения в первое, получаем

$$pdx = pdx + xdp - 2xp^3 dx - 3x^2 p^2 dp \quad \Rightarrow \quad xdp - 2xp^3 dx - 3x^2 p^2 dp = 0$$

или

$$(3x^2 p^2 - x)dp = -2xp^3 dx \qquad \Rightarrow \qquad (3xp^2 - 1)dp = -2p^3 dx, \quad x \neq 0.$$

Последнее равенство можно записать так: $\dfrac{dx}{dp} = (-\dfrac{3}{2p})x + \dfrac{1}{2p^3}$.

Это - линейное уравнение первого порядка.

3) Решаем его. Сначала однородное, находим его общее решение методом разделения переменных:

$$\frac{dx}{dp} = (-\frac{3}{2p})x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = (-\frac{3}{2})\frac{dp}{p} \qquad \Rightarrow \qquad x = Cp^{-\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{C}{p\sqrt{p}}.$$

4) Теперь находим частное решение неоднородного методом вариации постоянных:

$$C' p^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2p^3} \qquad \Rightarrow \qquad C' = \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad C(p) = -\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

5) Общее решение неоднородного, следовательно, будет

$$x(p) = \frac{C}{p\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{1}{p\sqrt{p}} \qquad \Rightarrow \qquad x(p) = \frac{C}{p\sqrt{p}} - \frac{1}{p^2}.$$

6) Теперь решение исходного уравнения можно записать в параметрическом виде: $\begin{cases} x(p) = \dfrac{C}{p\sqrt{p}} - \dfrac{1}{p^2} \\ y(p) = xp - x^2 p^3 \end{cases}$

Задача 05 Решить уравнение, найти особые решения, построить интегральные кривые

$$y'(y'-3)^2 = (y-x)^2 .$$

Решение. Составляем вспомогательную систему $\begin{cases} p(p-3)^2 = (y-x)^2 \\ y' = p \end{cases}$

Откуда

$$y - x = \pm\sqrt{p}(p-3) . \qquad (3)$$

Это после дифференцирования дает

$$pdx - dx = \pm\left(\frac{3\sqrt{p}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{p}}\right)dp \quad \Rightarrow \quad (p-1)dx = \pm\frac{3(p-1)}{2\sqrt{p}} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} p = 1 \\ x = \pm 3\sqrt{p} + C \end{array}\right.$$

Проверьте самостоятельно, что из (3) и $p = 1$ следует $y = x \pm 2$. В то время как из (3) и равенства $x = \pm 3\sqrt{p} + C$ получаем неособое решение $y = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3 + C$.

Теперь построим систему, задающую дискриминантную линию. Она будет иметь вид

$$\begin{cases} (y-x)^2 - d(d-3)^2 = 0 \\ 3(d-1)(d-3) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d = 3 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} d = 1 \\ y = x \pm 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

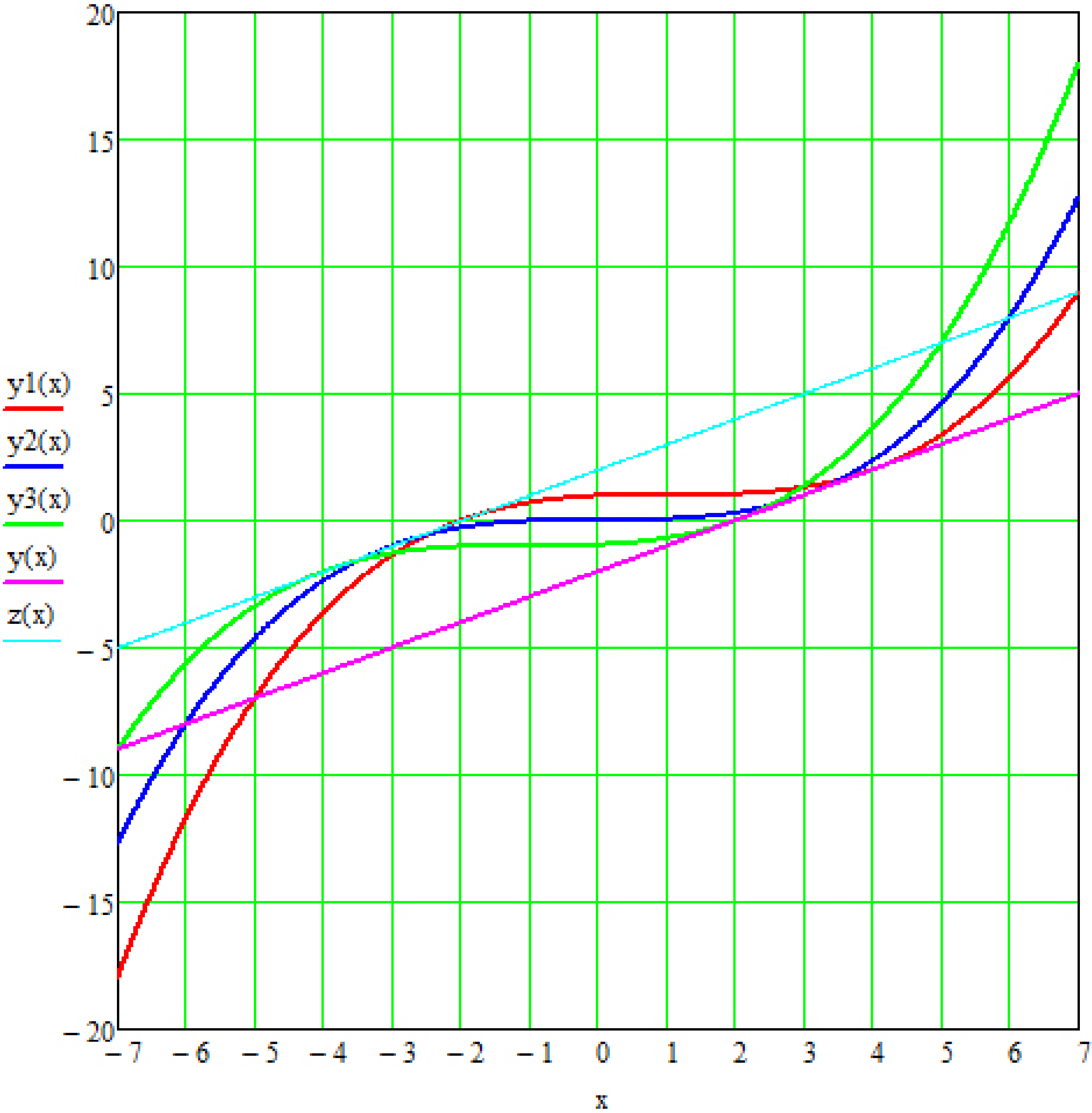
В первом случае линия $y = x$ не является решением исходного уравнения, а решения $y = x \pm 2$ могут оказаться особыми. Выясним это, записав условие прохождения двух интегральных кривых через одну и ту же точку и с общей касательной для каждого из кандидатов:

$$\begin{cases} x - 2 = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3 + C \\ 1 = \left(\frac{x-C}{3}\right)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2 = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3 + C \\ 1 = \left(\frac{x-C}{3}\right)^2 \end{cases}$$

Для первой системы $\forall x\ \exists C = x - 3$, при котором оба ее уравнения удовлетворяются, для второй это же имеем при . $C = x + 3\ \forall x$

$$y1(x) := \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + 1 \qquad y2(x) := \left(\frac{x}{3}\right)^3 \qquad y(x) := x - 2 \qquad z(x) := x + 2 \qquad y3(x) := \left(\frac{x+1}{3}\right)^3 - 1$$

$$\frac{d}{dx}y\left(\frac{d}{dx}y - 3\right)^2 = \blacksquare\cdot(y - x)^2$$



ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Задача 01 Решить ЗК $2yy''=(y')^2(3-4y(y')^2)$, при условиях $y(4)=1,\quad y'(4)=-1$.

Решение: Используем метод понижения порядка, поскольку уравнение в своей записи не содержит независимой переменной x.

1) Введем новую неизвестную функцию $u(y)=y'(x)$, считая y новой независимой переменной.

В этом случае $y''(x)=(y'(x))'_x=\dfrac{u'_y(y)}{x'_y}=uu'_y$. Наше уравнение принимает вид $2yuu'=u^2(3-4yu^2)$.

В силу начального условия $y'(4)=-1$ имеем для искомой функции $u\neq 0$.

Поэтому $2yu'=u(3-4yu^2)$ или $u'=\dfrac{3}{2y}u-2u^3$. Это уравнение Бернулли.

2) Если обе части уравнения Бернулли разделить на u^3, то получим $\dfrac{u'}{u^3}=\dfrac{3}{2y}\dfrac{1}{u^2}-2$.

Здесь делаем новую замену $z(y)=\dfrac{1}{u^2}$ с $z'=-2\dfrac{u'}{u^3}$. Получаем $-\dfrac{z'}{2}-\dfrac{3}{2y}z=-2$ или линейное неоднородное уравнение вида $z'+\dfrac{3}{y}z=4$.

3) Решаем однородное $z'+\dfrac{3}{y}z=0$ методом разделения переменных. Получаем $\ln|z|+3\ln|y|=\ln K,\ K>0$ или $z(y)=\dfrac{C}{y^3},\ C\neq 0.$ Это общее решение однородного.

4) Методом вариации постоянных ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $z^*(y)=C(y)y^{-3}$.

Подставляем эту формулу в неоднородное уравнение, получаем $C'(y)=4y^3 \quad\Rightarrow\quad C(y)=y^4$. Значит, $z(y)=\dfrac{C}{y^3}+y \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{u^2}=\dfrac{C}{y^3}+y$.

5) Из условия задачи; $u(1)=-1$. Поэтому

$$1=\frac{C}{1}+1 \quad\Rightarrow\quad C=0 \quad\Rightarrow\quad z=y \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{u^2}=y \quad\Rightarrow\quad u(y)=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Поскольку $u(1)=y'(4)=-1<0$, то $u(y)=-\dfrac{1}{\sqrt{y}} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{dy}=-\sqrt{y}$. Откуда $x=-\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+D$. А из $y(4)=1 \quad\Rightarrow\quad 4=-\dfrac{2}{3}+D \quad\Rightarrow\quad D=\dfrac{14}{3}$.

Наконец, $x=-\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\dfrac{14}{3} \qquad\Rightarrow\qquad y=(7-\dfrac{3}{2}x)^{\frac{2}{3}}$.