Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \quad \forall t \in T \subset R^1, \tag{3.3.1}$$

где коэффициенты матрицы $\|A\|$ комплексные константы. Комплекснозначную непрерывную вектор-функцию $\|b(t)\|$, будем называть для краткости *неоднородностью.*

`Теорема 3.3.1` **Общее решение неоднородной системы (3.3.1) представимо как сумма общего решения однородной системы (3.1.1) и частного решения той же неоднородной системы (3.3.1).**

Достаточно часто поиск частного решения неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 3.3.2 **Пусть $\|x_{(1)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(1)}(t)\|$, а $\|x_{(2)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(2)}(t)\|$, тогда**

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (3.3.1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Таким образом, согласно теореме 3.3.1, для решения неоднородной системы (3.3.1) необходимо (помимо решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной.

Как и в случае линейного неоднородного уравнения n-го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах при помощи формулы общего решения однородной методом *вариации постоянных*, что доказывает

Теорема 3.3.3 **Решением системы (3.3.1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\|g_{(k)}(t)\| \ , \qquad (3.3.2)$$

где $\{\ \|g_{(1)}(t)\|,\ \|g_{(2)}(t)\|,\ \ldots,\ \|g_{(n)}(t)\|\ \}$ **некоторый базис в линейном n-мерном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), а функции $C_k(t)$ находятся из матричного уравнения**

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \ .$$

В случае, когда неоднородности в системе (3.3.1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k, $e^{\alpha t}, \cos\beta t$ и $\sin\beta t$, ее частное решение может быть найдено без использования интегрирования – *методом неопределенных коэффициентов.* Действительно, при $\gamma = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

`Теорема 3.3.4` **Пусть система уравнений (3.3.1) такова, что** $\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\mu t}$ **, где**

$$\|p(t)\| = \|a_{(m)}\|\,t^m + \|a_{(m-1)}\|\,t^{m-1} + \ldots + \|a_{(1)}\|\,t + \|a_{(0)}\|\ .$$

Тогда частное решение системы (3.3.1) имеет вид $\|\,q(t)\|e^{\mu t}$ **, где** $\|q(t)\|$ **– вектор-многочлен**

- **той же самой степени что и** $\|\,p(t)\,\|$**, если** μ **не является корнем характеристического уравнения;**
- **или степени не выше, чем** $m + l$**, если** μ **является корнем характеристического уравнения, а** l **– размер максимальной из жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы** $\|A\|$**.**

Описанный метод проиллюстрируем примером.

`Задача 3.3.1` Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + e^t + e^{2t} - 2t^2\,, \\ \dot{y} = 2x + 3e^t + 2e^{2t} - t^2\,. \end{cases}$$

`Решение.` 1°. Представим для удобства решаемую систему в матричной форме

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| e^t + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| e^{2t} + \left\| \begin{matrix} -2t^2 \\ -t^2 \end{matrix} \right\| ,$$

или

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\| = \|A\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \|b_{(1)}\|\, e^t + \|b_{(2)}\|\, e^{2t} + \|b_{(3)}\|\, t^2\,,$$

введя (полезные для дальнейших расчетов) обозначения

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right\| , \quad \|b_{(1)}\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| ,$$

$$\|b_{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\| , \qquad \|b_{(3)}\| = \left\| \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right\| ,$$

2°. Теперь найдем (имея в виду применение теоремы 3.3.1) по стандартной схеме, описанной в § 3.1, общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| .$$

Находим собственные значения линейного преобразования с матрицей $\|A\|$

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{array} \right\| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 1\,, \\ \lambda_2 & = & 2\,. \end{array}$$

и соответствующие собственные векторы

$$\left\| \begin{array}{cr} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| .$$

$$\left\| \begin{array}{cr} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Тогда, согласно теореме 3.1.3, получаем общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} .$$

3°. Используя теорему 3.3.2, найдем теперь частные решения исходной неоднородной системы отдельно для каждой из неоднородностей, содержащих соответственно $\left\|b_{(1)}\right\|$, $\left\|b_{(2)}\right\|$ и $\left\|b_{(3)}\right\|$.

Рассмотрим подробно случай неоднородности $\left\|b_{(1)}\right\| e^t$, которая является векторным квазимногочленом с $\mu = \lambda_1 = 1$, причем $m = 0$, а $l = 1$, поскольку μ совпадает с однократным корнем характеристического многочлена. Значит частное решение следует искать в виде

$$\left\|r^*_{(1)}\right\| = \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t.$$

где первый нижний индекс у $\left\|a_{(ij)}\right\|$ равен показателю степени t, а второй – номеру частного решения.

Его подстановка в неоднородную систему

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \|A\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\|b_{(1)}\right\| e^t$$

дает

$$\Big(\left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t =$$

$$= \|A\| \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t + \left\|b_{(1)}\right\| e^t \,.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|A\| \left\|a_{(11)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| \,, \\ \|A\| \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|b_{(1)}\right\| & = & \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big(\|A\| - \|E\|\Big)\left\|a_{(11)}\right\| & = & \|o\| \,, \\ \Big(\|A\| - \|E\|\Big)\left\|a_{(01)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| - \left\|b_{(1)}\right\| \,. \end{array} \right. \qquad (3.3.3)$$

Заметим, что основные матрицы в обоих уравнениях системы (3.3.3) вырождены. Это есть следствие равенства $\mu = \lambda_1 = 1$, то есть, резонанса.

При этом первое уравнение (как однородное) совместно и имеет неединственное решение вида $\left\| a_{(11)} \right\| = \alpha \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\|$.

Второе же уравнение неоднородное, оно будет иметь решения, вообще говоря, не при любом $\left\| a_{(11)} \right\|$. Его можно сделать совместным, подобрав подходящее значение α.

Действительно, расширенная матрица второго уравнения системы (3.3.3) будет иметь ранг, равный рангу основной матрицы (что по теореме Кронекера–Капелли гарантирует совместность), если выполнены равенства

$$\operatorname{rg}\left\| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 2\alpha-3 \end{array} \right\| = \operatorname{rg}\left\| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{array} \right\| = 1\,.$$

Это дает $\alpha = 2$ и $\left\| a_{(11)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\|$. Вектор $\left\| a_{(01)} \right\|$ здесь неоднозначен, его можно взять равным $\left\| a_{(01)} \right\| = \left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\|$ и тогда $\left\| r^*_{(1)} \right\| = \left(\left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t\,.$

Случаи неоднородностей $\left\| b_{(2)} \right\|$ и $\left\| b_{(3)} \right\|$ рассматриваются аналогично первому.

Второй случай также резонансный, причем частным решением оказывается квазимногочлен нулевой степени (теорема 3.3.4 это допускает) вида $\left\| r^*_{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{2t}$.

В третьем случае резонанса нет, а частное решение имеет вид

Решение получено.

$$\left\| r^*_{(3)} \right\| = -\frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} 5 \\ 13 \end{matrix} \right\| - \frac{t}{2} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \frac{t^2}{2} \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| .$$