Показательная функция матрицы 2

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ (альтернативным следствию 3.4.1) служит формула (3.4.3). Однако ее непосредственное использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей.

Значительно более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм, основанный на следующих двух леммах.

Лемма 3.4.1 **Если матрица $\|D\|$ диагональна, т.е. у нее на главной диагонали стоят числа $\lambda_k \ \ \forall k = [1, n]$, а остальные элементы нулевые, то**

$$e^{\|D\|} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{array} \right\| .$$

Теорема 3.4.5 **Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|S\|$ – квадратные, порядка n и пусть матрица $\|S\|$ имеет обратную. Тогда если $\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \ \ \forall t \in T .$$

Из курса линейной алгебры известно, что, если в U^n существует базис из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, то матрица $\|D\|$, определяемая формулой

$$\|D\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$$

диагональна (здесь $\|S\|$ есть матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов). Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 3.4.1), используя теорему 3.4.5, найдем искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|D\|}\|S\|^{-1} .$$

В случае, когда базис из собственных векторов матрицы $\|A\|$ не существует, всегда возможно, согласно теореме 3.2.2 (Жордана), перейти (при помощи невырожденной матрицы перехода $\|S\|$) к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$, то есть иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых, размера l x l, клеток (3.2.1) вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right\| .$$

Покажем теперь, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя сумму какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \text{ где}$$

$$\|J_l(0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$ очевидно коммутируют, поэтому (согласно теореме 3.4.3)

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\|+t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|} .$$

Первый сомножитель легко вычисляется при помощи леммы 3.4.1. Второй найдем при помощи формулы (3.4.3)

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k . \qquad (3.4.7)$$

Заметим, что согласно правилу умножения матриц

$$\|J_l(0)\|^2 = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

. . . .

$$\|J_l(0)\|^{l-2} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\|J_l(0)\|^{l-1} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Т.е. при каждом последовательном увеличении на единицу k – показателя степени в $\|J_l(0)\|^k$ – единичная наддиагональ *укорачивается* на единицу и *сдвигается* вправо на один столбец и вверх на одну строку.

При $k = l$ матрица $\|J_l(0)\|^k$ оказывается нулевой и ряд (3.4.7) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых.

В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} \|J_l(0)\|^k =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \dots & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dots & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dfrac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \qquad (3.4.8)$$

Вычислив аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвратившись в исходный базис по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1} \ ,$$

получим искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.

Проиллюстрируем изложенную теорию на примере рассмотренной ранее задачи.

`Задача 3.4.1` Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|$.

Во втором варианте решения задачи приведем матрицу к жордановой форме и затем воспользуемся леммой 3.4.1 и теоремой 3.4.5.

Согласно теореме 3.2.2 (Жордана) жорданов базис в рассматриваемом случае состоит из элементов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$. Значит $\|S\|$ – матрица перехода от исходного базиса к жорданову – будет иметь вид

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

поскольку ее столбцами служат координатные представления элементов нового базиса. Как известно, матрица перехода невырожденная, поэтому обратная ей матрица существует и единственна

$$\|S\|^{-1} = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| .$$

Переход к жордановой форме осуществляется по правилу

$$\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| ,$$

что дает жорданову клетку

$$\|J_2\| = \left\| \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right\| .$$

В нашем случае $\lambda = 2$ и $l = 2$, поэтому из (3.4.8) и из $t\|J_l(\lambda)\| = \lambda t\|E\| + t\|J_l(0)\|$ следует

$$e^{t\|J_2(\lambda)\|} = e^{2t\|E\|+t\|J_2(0)\|} = e^{2t\|E\|} \cdot e^{t\|J_2(0)\|} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Наконец, по формуле $e^{t\|A\|} = \|S\|\, e^{t\|J\|}\|S\|^{-1}$ получаем

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= e^{2t} \left\| \begin{matrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{matrix} \right\| .$$

Решение получено.

В заключение обсуждения свойств матричной экспоненты опишем метод, позволяющий находить решения нескольких задач Коши, сформулированных для одного и того же начального $t = t_0$.

Поскольку множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) является n-мерным линейным пространством, то ее общее решения может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|\Phi(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| ,$$

где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ – произвольные комплексные числа. Или же в более компактной форме

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\|\, \|C\| \ . \tag{3.4.10}$$

При этом столбцами матрицы $\|\Phi(t)\|$ (часто называемой *фундаментальной*) являются координатные столбцы базисных частных решений системы (3.1.1). Примером такой матрицы, в силу равенства (3.4.6), может служить $e^{t\|A\|}$.

Заметим, что из очевидной коммутируемости матриц $t\|A\|$ и $-t\|A\|$ следуют равенства

$$\|E\| = e^{(t-t)\|A\|} = e^{t\|A\|} \cdot e^{-t\|A\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(e^{t\|A\|}\right)^{-1} = e^{-t\|A\|} .$$

Пусть теперь для некоторой фундаментальной матрицы $\|\Phi(t)\|$ выполнены равенства

$$e^{t\|A\|} = \|\Phi(t)\|\,\|S\| \qquad \text{и} \qquad e^{t_0\|A\|} = \|\Phi(t_0)\|\,\|S\| \ .$$

Тогда $\quad \|S\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} e^{t_0\|A\|} \quad$ и, значит,

$$e^{(t-t_0)\|A\|} = \|\Phi(t)\|\|\Phi(t_0)\|^{-1} . \tag{3.4.11}$$

Выясним, какой вид в фундаментальном базисе будет иметь $\|x(t)\|$ – решение задачи Коши для системы (3.1.1) с начальным условием $\|x(t_0)\| = \|x_0\|$.

Вначале из равенства (3.4.10), взятого для $t = t_0$, и начального условия задачи Коши (3.4.11) получаем

$$\|C\| = e^{-t_0\|A\|}\,\|x(t_0)\| \ .$$

Затем, использовав (3.4.10) в виде

$$\|x(t)\| = e^{t\|A\|}\,\|C\| \ ,$$

найдем, что

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|A\|}\,\|x_0\| \ . \tag{3.4.12}$$

Эффект использования формулы (3.4.12) демонстрирует

`Задача 3.4.2` Для системы уравнений

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| .$$

найти вещественные решения задач Коши со следующими начальными условиями

$$\left\| x_{(1)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(2)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(3)} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

`Решение.` Характеристическое уравнение данной системы имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, а собственные векторы

$$\left\| f_{(1,2)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\| \pm i \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| .$$

Тогда общее вещественное решение решаемой системы будет

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left(C_1 \left\| \begin{array}{c} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{array} \right\| + C_2 \left\| \begin{array}{c} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{array} \right\| \right)$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\|$$

Значит, в нашем случае

$$\Phi(t) = e^t \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\|$$

Матричную экспоненту при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ найдем при помощи формулы (3.4.11). Имеем

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) .$$

Откуда находим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) .$$

Тогда, согласно (3.4.11),

$$\exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \|A\|\right) = \|\Phi(t)\| \left\| \Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} -2\cos t + 4\sin t & 5\cos t - 5\sin t \\ -2\cos t + 2\sin t & 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Наконец, по формуле (3.4.12) выписываем решения задачи Коши единообразно для всех трех случаев:

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(1)1}(t) \\ x_{(1)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(2)1}(t) \\ x_{(2)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 10\sin t \\ -2\cos t + 6\sin t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(3)1}(t) \\ x_{(3)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 5\cos t - 5\sin t \\ 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Решение получено.