Вопрос 27

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью — квазимногочленом.

Определение 27-1	Уравнение вида $$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1y'(x)+a_0y(x)=b(x)\,, \quad (27-1)$$ где комплексные числа $a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{n-1}$ известны, функция $b(x)$ известна, непрерывна $\forall x \in X \subseteq R$ и имеет комплексные значения, а искомая комплекснозначная функция $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall x \in X$, называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка с постоянными коэффициентами.*

Это уравнение называется линейным, поскольку неизвестная функция и ее производные входят в (27-1) линейно, хотя функция $b(x)$, вообще говоря, нелинейна.

Если функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x)=\Big(\beta_0+\beta_1x+\ \ldots\ +\beta_kx^k\Big)e^{\mu x}\,,$$

где $\beta_j \quad j\in[0,k]$ и μ — некоторые комплексны константы, то она называется *квазимногочленом* степени k с параметром μ.

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ \ldots \ + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (27-2)$$

называется *однородным.*

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 27-1 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (29-2), то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\, C_1,\ C_2$.**

Лемма 27-2 **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного (27-2), а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (27-1), то $y_0(x) + y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (27-1).**

Лемма 27-3 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (27-1), то $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (27-2).**

Теорема 27-1

Для множества частных решений *однородного* **уравнения (27-2) справедливы утверждения:**

1°. Множество всех частных решений однородного уравнения (27-2) является линейным пространством размерностью n**, базисом в котором может служить любой фундаментальный набор решений.**

2°. Общее решение уравнения (27-2) есть совокупность всевозможных линейных комбинаций функций из фундаментального набора решений.

Теорема 27-2

Общее решение неоднородного уравнения (27-1) есть сумма общего решения однородного (27-2) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (27-1).

Общее решение однородного уравнения 27-2

Алгебраическое уравнение вида

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (27-3)$$

называется *характеристическим уравнением* уравнения (27-2).

Пусть *попарно не равные друг другу* корни уравнения (27-3) суть числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$, имеющие соответственно кратности равные $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s$.

В этом случае уравнение (27-3) может быть записано так:

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{k_s} = 0\ ,$$

при этом, как известно из курса алгебры, $k_1 + k_2 + \ \ldots\ + k_s = n$.

Теорема 27-3 **Общее решение уравнения (27-2) имеет вид**

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x)e^{\lambda_s x} \ , \qquad (27-4)$$

где $P_j(x) \ \forall j = [1, s]$ **суть алгебраические многочлены вида** $\sum\limits_{m=1}^{k_j} C_{jm} x^{m-1}$, **а** C_{jm} – **произвольные комплексные константы.**

Следствие 27-1 **Если все корни характеристического уравнения (27-3)** $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_n$ **простые (то есть кратности единица), то общее решение уравнения (27-2) имеет вид**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} \ ,$$

где $C_1, \ C_2, \ \ldots, \ C_n$ – **произвольные комплексные константы.**

Следствие 27-2 **Линейное пространство, образованное частными решениями уравнения (27-2), n-мерное.**

Базисом в этом пространстве может служить любой упорядоченный набор, составленный из следующих n функций:

Таблица 2.3.1

$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$\dots$	$e^{\lambda_s x}$
$xe^{\lambda_1 x}$	$xe^{\lambda_2 x}$	$\dots$	$xe^{\lambda_s x}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$
	$x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$		

Выделение вещественных решений

Достаточно часто в вычислительной практике требуется найти все его вещественные решения. Эти решения можно находить непосредственным выделением в формуле (27-4) вещественной части.

Однако, если уравнение (27-2) имеет *вещественные* коэффициенты, то корни характеристического уравнения (а, значит, и базисные вектор-функции) вещественные или попарно комплексно сопряженные.

В этом случае в пространстве частных решений однородного уравнения (27-2) можно построить базис, состоящий только из вещественных вектор-функций $\psi_j(x)$. Тогда общее *вещественное* решение уравнения (27-2) имеет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j(x) \ ,$$

где R_j – произвольные *вещественные* константы.

Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть общее решение однородного уравнения найдено. Тогда в силу теоремы 27-2 для построения общего решения неоднородного уравнения (27-1) достаточно найти какое-нибудь частное решение этого неоднородного уравнения.

Для произвольной непрерывной функции $b(x)$ такое решение всегда может быть найдено в квадратурах методом вариации постоянных.

В случае, когда $b(x)$ есть квазимогочлен, вид частного решения неоднородного уравнения определяет

Теорема 27-4 **Пусть** $b(x)$ **квазимногочлен вида** $P_m(x)e^{\mu x}$, **где** $P_m(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$, **а** $y^*(x)$ – **некоторое частное решение неоднородного уравнения (27-1).**

Тогда найдется алгебраический многочлен $Q_m(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m$ **такой, что**

- $y^*(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **не является корнем характеристического уравнения (27-3) (так называемый** *нерезонансный* **случай);**
- $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\mu x}$, **если** μ **корень характеристического уравнения (27-3) кратности** k **(***резонансный* **случай).**