Вопрос 28

Системы линейных однородных дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и методы их решения.

Определение 28-1	*Нормальной системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ \dot{x}_2(t) & = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) & = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \qquad (28-1)$$ где $t \in T$, $x_k(t)$ $k = [1, n]$ – комплекснозначные непрерывно дифференцируемые искомые функции вещественного аргумента, где числа a_{ij} $\forall i, j = [1, n]$ — комплексные константы.

Данную систему уравнений можно записать в *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)\,, \qquad \forall i = [1, n]\,,$$

или же в еще более простой, матричной форме $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, где

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \|x\| = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{Vmatrix}.$$

Свойства ее общего решения – совокупности всех частных решений – описываются следующим набором теорем.

Теорема 28-1 **Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ — частные решения системы (28-1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\| + C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант C_1 и C_2.**

Теорема 28-2 **Множество всех частных решений однородной системы (28-1) образует линейное пространство.**

Заметим теперь, что $\|A\|$ — матрицу системы уравнений (28-1) — формально можно рассматривать как определение в n-мерном унитарном пространстве U^n некоторого линейного преобразования $\widehat{A}$.

Ответ на вопрос: «При каких $\|f\|$ и λ частное нетривиальное решение системы (28-1) имеет вид $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$?» дает

Теорема 28-3

Для того, чтобы вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлась частным ненулевым решением системы (28-1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а λ — отвечающим ему собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$ в U^n.

Доказательство

Пусть $\|f\|$ некоторый комплекснозначный ненулевой столбец. Подставив $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ в уравнение $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, и приняв во внимание равенство $\frac{d}{dt}\,e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, а также то, что $e^{\lambda t} \neq 0$, получим

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \;\Leftrightarrow\; \lambda\|f\|e^{\lambda t} = \|A\|\left(\|f\|e^{\lambda t}\right) \;\Leftrightarrow\; \|A\|\|f\| = \lambda\|f\|\ .$$

Последнее равенство есть запись определения собственного вектора и собственного значения линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n.

Теорема доказана.

Возможный вид общего решения системы (28-1) описывает

Теорема 28-4 **Пусть в линейном пространстве U^n существует базис $\left\{\|f_{(1)}\|,\ \|f_{(2)}\|,\ \ldots,\ \|f_{(n)}\|\right\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

- $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t}+C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t}+\ldots+C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где** $C_1, C_2, \ldots, C_n$ **– произвольные комплексные числа, является частным решением системы (28-1);**

- **— и каждое частное решение этой системы может быть представлено в виде**
$C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t}+C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t}+\ldots+C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.

Доказательство

Справедливость первого пункта следует из теорем 28-1 и 28-2.

Докажем второй пункт. Пусть $\|x(t)\|$ некоторое частное решение системы (28-1). Его значение при любом фиксированном $t \in T$ может быть (в силу условия теоремы) разложено в U^n по базису из собственных векторов преобразования $\|A\|$

$$\|x(t)\| = D_1(t)\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|f_{(n)}\| \, . \qquad (28-2)$$

Подставим это выражение в систему (28-1), получим

$$\dot{D}_1(t)\|f_{(1)}\| + \dot{D}_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + \dot{D}_n(t)\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\|A\|\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|A\|\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|A\|\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\lambda_1\|f_{(1)}\| + D_2(t)\lambda_2\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\lambda_n\|f_{(n)}\| \, .$$

Откуда вытекает равенство

$$\left(\dot{D}_1(t) - \lambda_1 D_1(t)\right)\|f_{(1)}\| + \ldots + \left(\dot{D}_n(t) - \lambda_n D_n(t)\right)\|f_{(n)}\| = \|o\|.$$

Наконец, в силу линейной независимости базисных элементов, из этого следует

$$\dot{D}_k(t) - \lambda_k D_k(t) = 0 \quad \forall k = [1, n] \qquad \Longrightarrow \qquad D_k(t) = C_k e^{\lambda_k t} \, ,$$

что, в сочетании с равенством (28-2), дает требуемый формат записи решения.

Теорема доказана.

Теорема 28-5 **В условиях теоремы 28-4 линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (28-1), является n-мерным.**

Теоретически процедура решения системы (28-1) заключается в:

1) построении в U^n базиса из собственных векторов преобразования $\widehat{A}$,
2) переходе в этот базис, где матрица $\widehat{A}$ диагональная, и, значит, система (28-1) с такой матрицей легко решается,
3) обратном переходе к исходному базису.

На практике же процесс решения сводится к использованию формулы, указанной в условии теоремы 28-4.

Случай жорданова базиса

Известно, что базис из собственных векторов существует не для любого линейного преобразования $\widehat{A}$.

В качестве альтернативы можно воспользоваться существованием в U^n для любого линейного преобразования (*теорема Жордана*) базиса, в котором матрица $\widehat{A}$ является блочно диагональной, состоящей из *жордановых клеток.*

Жорданова клетка — это квадратная матрица порядка l, имеющая вид:

$$\|J_l(\lambda)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right\| , \qquad (28-3)$$

где λ – некоторое комплексное число.

Нетрудно видеть, что система (28-1) с такой матрицей

$$\begin{cases} \dot y_1 & = & \lambda y_1 + y_2 \ , \\ \dot y_2 & = & \lambda y_2 + y_3 \ , \\ \dot y_3 & = & \lambda y_3 + y_4 \ , \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dot y_{l-1} & = & \lambda y_{l-1} + y_l \ , \\ \dot y_l & = & \lambda y_l \ . \end{cases}$$

также решается достаточно просто

$$y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ ,$$

$$y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1}\Big) e^{\lambda t} \ ,$$
$$y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2}\right) e^{\lambda t} \ ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1\right) e^{\lambda t} \ .$$

Значит, процедура решения системы (28-1) в жордановом случае сводится к:

1) построению в U^n хорданова базиса, то есть, базиса в котором матрица преобразования $\widehat{A}$ имеет жорданову форму,

2) переходу в этот базис, где система (28-1) с такой матрицей также легко решается,

3) обратному переходу к исходному базису.

Остается найти способ построения жорданова базиса.

Пусть $\|\widehat{A}\|$ — жорданова клетка. Из определения матрицы линейного преобразования следует, что элементы (векторы) жорданова базиса $\{\ \|h_{(1)}\|,\ \|h_{(2)}\|,\ \dots,\ \|h_{(l)}\|\ \}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda\|h_{(1)}\|\ , & & \|\widehat{A}-\lambda\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\|\ , \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\|\ , & & \|\widehat{A}-\lambda\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\|\ , \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\|\ , & \Longrightarrow & \|\widehat{A}-\lambda\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\|\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A}-\lambda\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\|\ .
\end{array}$$

Нетрудно заметить, что первым элементом в таком наборе базисных векторов, называемым *жордановой цепочкой*, служит собственный вектор линейного преобразования $\widehat{A}$ (но, вообще говоря, не любой!) Отметим также, что попытка вычислить в этой цепочке элемент с номером $l+1$ приводит к несовместной системе уравнений.