Вопрос 30

Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие локального экстремума.

Пусть $F(x, y, p)$ — непрерывно дифференцируемая при всех вещественных $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$, имеющая вещественные значения функция. Наконец, пусть заданы вещественные числа A и B.

Рассмотрим *функционал*, то есть, правило, по которому *каждой* непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $y(x)$, удовлетворяющей условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$, поставлено в соответствие *единственное* число $J(y)$ по формуле

$$J(y) = \int_a^b F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) dx \qquad (30-1)$$

Тот факт, что функция $y(x)$ удовлетворяет перечисленному набору условий, для краткости, далее будем обозначать $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется так:

среди функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$ найти те,
для которых $J(y)$ имеет *экстремальное*
(*максимальное* или же *минимальное*) значение.

Вначале определим смысл термин *экстремум функционала* (30—1) .

`Определение 30-1`	Будем говорить, что функционал (30—1) имеет на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ *локальный минимум* (*максимум*), если для всех достаточно близких к $y^*(x)$ других функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ выполняется неравенство $$J(y) \geq J(y^*) \quad \Big(J(y) \leq J(y^*) \Big) .$$

Если неравенства строгие при $y \neq y^*$, то говорят о *строгом* экстремуме. В случае, когда это неравенство удовлетворяется *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, экстремум называется *абсолютным.*

В определении 30—1 говорится о «достаточно близких друг к другу функциях». Смысл этого высказывания станет понятным, если указать способ *количественной* оценки степени близости функций, принадлежащих некоторому множеству.

Поступим следующим образом,

Для множества всех, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вещественных функций, степень близости любых двух из них — $y_1(x)$ и $y_2(x)$, можно, например, оценить величиной

$$\rho\,(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]}\Big|y_1(x) - y_2(x)\Big| + \max_{x\in[a,b]}\Big|y_1'(x) - y_2'(x)\Big| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1[a, b]\,. \tag{30 - 2}$$

Отметим, что используя различные способы оценки степени близости функций, мы будем получать, вообще говоря, определения *разных* типов экстремума функционала.

Чтобы уточнить, о каком виде экстремума идет речь, при использовании формулы (30—2) принято говорить о *слабом локальном экстремуме.* В то время как, в случае применения, скажем, формулы

$$\rho\,(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]}\Big|y_1(x) - y_2(x)\Big| \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1[a, b]$$

тип экстремума называется *сильным.*

Определение 30—1 может оказаться источником также и других затруднений.

Пусть для непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ при заданном $\varepsilon > 0$ «достаточно близкими» к $y^*(x)$ считаются функции, для которых $\rho\,(y_1, y_2) < \varepsilon\,$. Таких функций, очевидно, бесконечно много и непосредственное применение определения 30—1 оказывается невозможным.

В этом случае целесообразно получить дополнительные критерии, позволяющие сужать до приемлемого уровня множества, могущие содержать экстремальные функции.

При решении вопроса о том, является ли функция $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ экстремальной или нет, полезным оказывается вспомогательный функционал вида

$$J(y+\alpha h) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x)+\alpha h(x), y'(x)+\alpha h'(x)\Big)dx\,, \qquad (30-3)$$

где α — малый положительный параметр, а $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$, то есть, произвольная непрерывно дифференцируемая функция, имеющая в граничных точках a и b нулевые значения.

Заметим, что при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$ функционал $J(y+\alpha h)$ есть непрерывно дифференцируемая *функция* параметра α.

Следовательно, как величину, так и направление изменения значения исследуемого функционала $J(y)$ можно оценивать модулем и, соответственно, знаком числа $\left.\dfrac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

С другой стороны, $J(y+\alpha h)$ — функционал от $y(x)$ и $h(x)$, можно рассматривать как римановский интеграл, зависящий от параметра α.

Для такого интеграла справедлива теорема Лейбница, из которой следует, что

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x) \right) dx\ . \quad (30-4)$$

Это позволяет ввести в рассмотрение еще один вспомогательный функционал и дать

Определение 30-2	Функционал $\delta J(y,h) = \left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right\|_{\alpha=0}$ называется *первой вариацией функционала* $J(y)$ *функции* $y(x)$ (или, как иногда говорят, «*в точке* y»).

Необходимое условие существования слабого экстремума, использующее понятие первой вариации, дает

Теорема 30-1 **Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то** $\delta J(y^*,h) = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

Практическое использование теоремы 30-1, опять-таки, затрудняет квантор $\forall$, содержащийся в ее формулировке.

Однако это затруднение может быть преодолено при помощи так называемой *основной леммы вариационного исчисления.* Эта лемма имеет следующую формулировку

Лемма 30-1 **Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a,b]$ **и**

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 \qquad\qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b],$$

то $f(x) \equiv 0$ **на** $[a,b]$.

Нетрудно видеть, что эта лемма утверждение с квантором $\forall$ сводит к утверждению этого квантора не содержащего.

Воспользуемся этой леммой, преобразовав предварительно второе слагаемое под интегралом в (30—4) к виду, содержащему в качестве множителя не $h'(x)$, а $h(x)$.

Действительно, интегрируя «по частям» второе слагаемое под интегралом в формуле (30-4), получаем

$$\int_a^b \frac{\partial F\,(x, y, y')}{\partial y'} h'(x)\,dx =$$

$$= \frac{\partial F\,(x, y, y')}{\partial y'} h(x) \Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} h(x)\,dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} h(x)\,dx$$

поскольку $h(a) = h(b) = 0$.

Подставив это выражение в (30—4) и использовав затем утверждение теоремы 30—1, получим

$$\delta J(y^*, h) = 0 = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\, dx \qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b] \ .$$

Откуда, согласно основной лемме вариационного исчисления, приходим к заключению, что справедлива

Теорема 30-2 **Пусть** $F(x, y, p)$ **— дважды непрерывно дифференцируемая при всех** $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ **и** $p \in (-\infty, +\infty)$ **функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция** $y^*(x)$, $x \in [a, b]$, **есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера***:**

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \ . \qquad (30-5)$$

Определение 30-3	Всякое решение уравнения Эйлера (30—5) называется *экстремалью* функционала $J(x, y, y')$. В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Таким образом, множество функций, являющихся решением простейшей задачи вариационного исчисления содержится во множестве допустимых экстремалей. Это существенно облегчает применение определения 30–1.

В приведенной формулировке теоремы 30—2 говорится, что рассматриваемые функции дважды непрерывно дифференцируемы. Это оказалось необходимым для законности применения интегрируемости «по частям».

Однако непрерывности вторых производных можно не требовать, если спользовать, вместо основной леммы вариационного исчисления, лемму Дюбуа-Реймона (не входит в программу курса). Уравнение Эйлера оказывается верным и при исходных предположениях в простейшей задаче вариационного исчисления.

В заключение отметим, что уравнение Эйлера является *необходимым*, но не *достаточным* условием.

Иначе говоря, допустимая экстремаль, находимая из уравнения Эйлера, вообще говоря, необязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

`Пример 30-1` Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left(y'^2 - \frac{25}{4} y^2 \right) \, dx \ , \quad y(0) = 1, \ y(\pi) = 2 \ .$$

Решение Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4} y = 0 \, .$$

Его общее решение есть $\qquad y(x) = C_1 \cos\frac{5x}{2} + C_2 \sin\frac{5x}{2}$,
а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2} \, .$$

Возьмем $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[0,\pi]$ вида $h(x) = \dfrac{1}{k}\sin nx$, где k и n – произвольные натуральные числа. Тогда (опуская промежуточные выкладки) получим

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) dx = \left(n^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2k^2}.$$

Откуда следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta J < 0 \ \text{ при } n = 1;\, 2 \quad \text{и} \quad \Delta J > 0 \ \text{ при } n \geq 3\, .$$

Решение получено. Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.