А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА 2020, верс. 22сен2020г.

О методах понижения порядка уравнения и других специальных алгоритмах

В некоторых случаях оказывается полезным использование методов *понижения порядка.*

Порядок уравнения вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ может быть понижен, если

1°. Левая часть исходного уравнения не содержит неизвестной функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно $1 \le k \le n$. То есть уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ .$$

В этом случае за новую неизвестную функцию принимаем $u(x) = y^{(k)}(x)$, тогда:

$$y^{(k+1)}(x) = u'(x), \ \ldots \ , y^{(n)}(x) = u^{(n-k)}(x).$$

Порядок уравнения понизился до $n - k$.

2°. Формулировка уравнения не содержит независимой переменной. Это значит, что мы имеем уравнение вида

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ .$$

Приняв за новую независимую переменную y, а за новую искомую функцию $y'(x) = u(y)$, и учитывая, что

$$y'(x) = u, \qquad y''_{xx}(x) = u'_x(x) = u'_y \cdot y'(x) = u'_y u, \qquad \ldots \ ,$$

понижаем порядок уравнения на единицу.

3°. Исходное уравнение является однородным относительно искомой функции и ее производных, то есть не меняется, если каждую из них умножить на $k > 0$. Порядок уравнения понизится на единицу при замене

$$y' = yu, \qquad y'' = y'u + yu' = yu^2 + yu', \qquad \ldots\ .$$

4°. Исходное уравнение таково (или же приводится к такому виду), что его левая часть является полной производной некоторого порядка. Этот метод поясним следующим примером.

Задача 1.6.1 Понизить порядок уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Умножив обе части этого уравнения на y', получим

$$y'y'' + yy' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\,y'^2\right)' + \left(\frac{1}{2}\,y^2\right)' = 0$$

или $\left(y'^2 + y^2\right)' = 0$.

Откуда приходим к уравнению первого порядка

$$y'^2 + y^2 = C^2 \ ,$$

где C есть произвольная константа. Легко видеть, что у него имеются решения $y(x) = C \neq 0$, являющиеся *посторонними* для исходного уравнения.

Отметим, что для решения этой задачи можно использовать и метод 2°. Действительно, сделав замену $y' = u$, при которой $y'' = u'_y u$, мы получим

$$u'_y u + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u\,du + y\,dy = 0.$$

Откуда следует, что

$$d\left(\frac{u^2 + y^2}{2}\right) = 0 \quad \text{или, окончательно,} \quad y'^2 + y^2 = C^2 \ .$$

Решение получено.

Линейные уравнения $n-$го порядка.

Определение 2.1.1	Уравнение вида $$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\dots$$ $$\dots+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=b(x)\,, \qquad (2.1.1)$$ где известные функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ непрерывны $\forall x\in X$, а искомая функция $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall x\in X$, называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка.*

Данное название оправдывается тем, что неизвестная функция $y(x)$, так же как и ее производные, входит в уравнение (2.1.1) линейно. В то время как функции $a_1(x),\ a_2(x),\ \dots\ a_n(x)$ и $b(x)$ могут быть и нелинейными. Как и раньше, в случае $b(x)\equiv 0\ x\in X$ это уравнение будем называть *однородным*, иначе – *неоднородным.*

Основные свойства решений уравнения (2.1.1) описывают:

Теорема 2.1.1 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (2.1.1), то $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\ C_1,\ C_2$.**

Доказательство.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения, то

$$y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_1'(x)+a_n(x)y_1(x)=0 \quad \text{и}$$

$$y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)y_2'(x)+a_n(x)y_2(x)=0\,.$$

Умножив первое равенство на C_1, а второе на C_2, и сложив результаты умножения почленно, в силу линейности операции дифференцирования получим

$$\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)^{(n)}+a_1(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)^{(n-1)}+\ldots$$

$$+a_{n-1}(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)'+a_n(x)\Big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\Big)=0\,.$$

Но последнее равенство означает, что $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).

Теорема доказана.

`Следствие 2.1.1` **Множество всех частных решений однородного уравнения (2.1.1) является линейным пространством.**

Покажите самостоятельно, что это следствие справедливо, проверив аксиоматику линейного пространства.

`Теорема 2.1.2` **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного, а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_0(x) + y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (2.1.1).**

`Теорема 2.1.3` **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (2.1.1), то $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (2.1.1).**

Следствие 2.1.2 **Общее решение неоднородного уравнения (2.1.1) есть сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения (2.1.1).**

Доказательство.

В одну сторону: пусть $y(x)$ есть произвольное частное решение неоднородного уравнения (2.1.1), а $y^*(x)$ фиксированное решение этого уравнения, тогда в силу теоремы 2.1.3 — произвольное решение однородного.
Имеем
$$y(x) = \Big(y(x) - y^*(x)\Big) + y^*(x)$$
и значит $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$.
Обратно: если $y_0(x)$ — произвольное решение однородного, то в силу теоремы 2.1.2 $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$ – произвольное решение неоднородного уравнения.

Следствие доказано.

Теперь рассмотрим некоторые свойства комплексных функций вещественного аргумента.

В предположении, что вещественные числа $\alpha = \mathrm{Re}\lambda$ и $\beta = \mathrm{Im}\lambda$ являются соответственно *вещественной* и *мнимой частью* комплексного числа $\lambda = \alpha + i\beta$, дадим определение функции $e^{\lambda x}$.

Поскольку формула Эйлера (следующая из равенства разложений в ряд Тейлора функций, стоящих в ее правой и левой частях) имеет вид $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$, то естественно комплексную экспоненту определить как

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \ .$$

Тогда непосредственная проверка показывает, что будут выполняться соотношения $e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x}$ и $e^{\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} = 1$. Например для второй формулы

$$e^{\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \cdot e^{-\alpha x} (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) =$$

$$= e^{\alpha x} e^{-\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \cdot (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \cos^2 \beta x - (i^2) \sin^2 \beta x =$$

$$= \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x = 1 \, .$$

Напомним также, что неотрицательное число $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ называется *модулем* комплексного числа λ. Причем справедливо соотношение $|e^{\lambda x}| = e^{\alpha x}$, поскольку верны равенства:

$$|e^{\lambda x}| = |e^{\alpha x}| \cdot |e^{i\beta x}|$$

и

$$|e^{i\beta x}| = \sqrt{\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x} = 1 \; .$$

Пусть функция $f(x)$, определенная $\forall x \in X$, имеет комплексные значения, тогда $f(x)$ представима как $u(x) + iv(x)$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют вещественные значения.

Теперь дадим

Определение 2.1.2	Функция $f(x)$ называется – *непрерывной*, если непрерывны (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$; – *дифференцируемой*, если дифференцируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$; – *интегрируемой*, если интегрируемы (в обычном смысле) функции $u(x)$ и $v(x)$.

Согласно определению 2.1.2 будут верны равенства:

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x) \qquad \text{и}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx\ ,$$

то есть дифференцирование и интегрирование выполняются для комплекснозначной функции по обычным правилам, если считать i константой.

Например, для комплексной экспоненты

$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{x_0}^{x} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - e^{\lambda x_0}\right), \quad \lambda \neq 0\,.$$

Проверим справедливость первого из этих двух равенств. Имеем

$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\, e^{\alpha x}\right)(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}\frac{d}{dx}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \beta e^{\alpha x}\left(-\sin\beta x + i\cos\beta x)\right) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + i\beta e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - \frac{1}{i}\sin\beta x\right) =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + i\beta e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) =$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda e^{\lambda x}\,,$$

поскольку $\quad \left(-\dfrac{1}{i}\right) = -\dfrac{i}{i^2} = -\dfrac{i}{(-1)} = i\,.$

Важно отметить, что, теперь сформулированные теоремы и следствия оказываются справедливыми и для комплекснозначных функций вещественногно аргумента.

Продемонстрируем использование приведенных выше теорем и формул на примере решения неоднородного линейного уравнения первого порядка специального вида

$$y' - \lambda y = \sum_{k=1}^{t} P_k(x)e^{\mu_k x}\ , \qquad (2.1.2)$$

где $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ – некоторые комплексные константы, а

$$P_k(x) = b_{0k} + b_{1k}x + \ldots + b_{m_k k}x^{m_k}, \quad b_{m_k k} \neq 0$$

суть алгебраические многочлены степеней m_k, $k = [1, t]$ с комплексными коэффициентами.

Функции, имеющие вид слагаемых суммы, стоящей в правой части уравнения (2.1.2), принято называть *квазимногочленами*.

Согласно теореме 1.3.1 общее решение однородного уравнения (2.1.2) дается формулой $y_0(x) = Ce^{\lambda x}\ \forall C$. А в силу линейности этого уравнения по y и y' его частное решение есть сумма частных решений уравнений

$$y' - \lambda y = P_{m_k}(x)e^{\mu_k x} \quad \forall k = [1, t]\,. \qquad (2.1.3)$$

`Теорема 2.1.4` **При $\lambda \neq \mu_k$ частным решением уравнения (2.1.3) является функция $y^*(x) = Q_{m_k}(x)e^{\mu_k x}$, а при $\lambda = \mu_k$ – функция $y^*(x) = xQ_{m_k}(x)e^{\mu_k x}$, где $Q_{m_k}(x)$ – алгебраический многочлен степени m_k.**

Доказательство.

Какое-нибудь частное решение уравнения (2.1.3) попробуем найти не по формуле (1.3.3), а непосредственным выбором из функций вида $y^*(x) = R(x)e^{\mu_k x}$.
Подстановка такой $y^*(x)$ в (2.1.3) приводит к следующему уравнению для функции $R(x)$:

$$R' + (\mu_k - \lambda)R = P_{m_k}(x) \ . \tag{2.1.4}$$

При $\lambda = \mu_k$ (*резонансный* случай) можем взять конкретно

$$R(x) = \int\limits_0^x P_{m_k}(u)\, du = x\, Q_{m_k}(x) \quad \Rightarrow \quad y^*(x) = xQ_{m_k}(x)e^{\mu_k x},$$

где $Q_{m_k}(x) = c_{0k} + c_{1k}x + \ldots + c_{m_k k}x^{m_k}$ – некоторый алгебраический многочлен степени m_k .
Если же $\lambda \neq \mu_k$ (*нерезонансный* случай), то $R(x)$ можно найти из уравнения (2.1.4) в виде комплекснозначного многочлена $Q_{m_k}(x) = d_{0k} + d_{1k}x + \ldots + d_{m_k k}x^{m_k}$.
При этом значения чисел d_{jk} $j = [0, m_k]$ (также, как и c_{jk}) находятся путем приравнивания коэффициентов при равных степенях x в правой и левой частях (2.1.4).

Теорема доказана.