А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА 2020, верс. 29сен2020г.

0.1. Дифференциальные многочлены и их свойства

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка (2.1.1) в случае, когда оно однородное и имеет постоянные коэффициенты

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0\ ,\ a_0 \neq 0\ . \tag{2.2.1}$$

Определение 2.2.1	Будем говорить, что задан *оператор дифференцирования* $\widehat{D} = \dfrac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых $\forall x \in X$ функций, со значениями в линейном пространстве функций непрерывных $\forall x \in X$, если каждой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ ставится в соответствие единственная непрерывная функция $y'(x)$, что символически обозначается в виде равенств: $y'(x) = \widehat{D}y(x)$ или $y' = \widehat{D}y$. Тогда, очевидные равенства $$\frac{d^k}{dx^k} = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\right)\right)\right)}_{k} = \underbrace{\widehat{D}\widehat{D}\cdots\widehat{D}}_{k} = \widehat{D}^k$$ позволяют определить *степень дифференциального оператора с натуральным показателем* k. Наконец, используя $\widehat{E}$ — тождественный (единичный) оператор и равенство $\widehat{D}^0 = \widehat{E}$, получаем естественное определение *нулевой степени дифференциального оператора.*

В силу данного определения и равенств $a_n y = a_n \widehat{E} y = a_n \widehat{D}^0 y$, уравнение (2.2.1) записывается в виде

$$a_0 \widehat{D}^n y + a_1 \widehat{D}^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} \widehat{D}^1 y + a_n \widehat{D}^0 y = 0 \quad \text{или} \quad L(\widehat{D})\, y = 0\,,$$

где $L(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ – алгебраический многочлен n-ой степени от x, называемый для уравнения (2.2.1) *характеристическим.*

При этом $y(x)$ – решение уравнения $L(\widehat{D})\, y = 0$ – можно трактовать как прообраз отображения n раз непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ в функцию, тождественно равную нулю $\forall x \in X$. Покажите самостоятельно *линейность* отображения $L(\widehat{D})\, y \longrightarrow 0$.

Введем для множества дифференциальных операторов вида $L(\widehat{D})$, называемых далее *дифференциальными многочленами*, операции *сложения* и *умножения*.

Определение 2.2.2	*Суммой дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D}) + M(\widehat{D})\Big)\, y = L(\widehat{D})y + M(\widehat{D})y \quad \forall y \in \mathcal{C}\,,$$ где $\mathcal{C}$ – линейное пространство достаточное число раз непрерывно дифференцируемых на X функций. *Произведением дифференциальных многочленов* $L(\widehat{D})$ и $M(\widehat{D})$ называется дифференциальный многочлен $L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})$ такой, что $$\Big(L(\widehat{D}) \cdot M(\widehat{D})\Big)\, y = L(\widehat{D}) \Big(M(\widehat{D})y\Big) \quad \forall y \in \mathcal{C}\,.$$

Операции сложения и умножения дифференциальных многочленов обладают свойствами *коммутативности*, *ассоциативности* и *дистрибутивности*. Это позволяет оперировать с ними как с обычными алгебраическими многочленами, в частности разлагать на линейные множители.

К другим полезным свойствам дифференциальных многочленов относятся соотношения, справедливость которых устанавливает

`Теорема 2.2.1` **Для любого комплексного числа λ и любой функции $y(x) \in \mathcal{C}$ справедливы соотношения:**

$$L(\widehat{D})e^{\lambda x} = L(\lambda) \cdot e^{\lambda x} \ ,$$

$$L(\widehat{D})\left(e^{\lambda x}y(x)\right) = e^{\lambda x}L(\widehat{D}+\lambda)y(x) \ ,$$

$$\left(\widehat{D}-\lambda\right)^k \left(e^{\lambda x}y(x)\right) = e^{\lambda x}y^{(k)}(x) \qquad (2.2.2)$$

для любых целых неотрицательных k.

Доказательство.

Первое соотношение следует из определения дифференциального многочлена и правил дифференцирования.

В справедливости второго убедимся, доказав предварительно методом математической индукции, формулу

$$\widehat{D}^k \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^k y \, . \tag{2.2.3}$$

Эта формула очевидно справедлива для $k = 0$. Заметим также, что она верна и при $k = 1$:

$$\widehat{D} \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} \widehat{D} y + e^{\lambda x} \lambda y = e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right) y \, .$$

Теперь покажем, что из равенства (2.2.3) будет следовать соотношение $\widehat{D}^{k+1} \left(e^{\lambda x} y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^{k+1} y$. Действительно,

$$\widehat{D}^{k+1} \left(e^{\lambda x} y\right) = \widehat{D} \left(\widehat{D}^k \left(e^{\lambda x} y\right)\right) \, ,$$

но это выражение по предположению индукции равно

$$\widehat{D} \left(e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k y\right) =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k \widehat{D} y + e^{\lambda x} \lambda \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k y =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\widehat{D} + \lambda\right)^k \left(\widehat{D} y + \lambda y\right) = e^{\lambda x} (\widehat{D} + \lambda)^{k+1} y \, .$$

Наконец, используя соотношение (2.2.3) и формулу для характеристического многочлена, получаем второе равенство, указанное в формулировке теоремы,

$$L(\widehat{D}) \left(e^{\lambda x} y\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{D}^{n-k} \left(e^{\lambda x} y\right) =$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k (\widehat{D} + \lambda)^{n-k} y = e^{\lambda x} L(\widehat{D} + \lambda) y \, .$$

Третью формулу мы докажем также методом математической индукции. Она очевидна для $k = 0$ и легко проверяется при $k = 1$:

$$\left(\widehat{D} - \lambda\right)\left(e^{\lambda x} y\right) = \left(e^{\lambda x} y\right)' - \lambda e^{\lambda x} y =$$

$$= \lambda e^{\lambda x} y + e^{\lambda x} y' - \lambda e^{\lambda x} y = e^{\lambda x} y' \, .$$

Пусть формула (2.2.2) также справедлива при некотором $k > 1$, тогда

$$\left(\widehat{D} - \lambda\right)^{k+1}\left(e^{\lambda x} y\right) = \left(\widehat{D} - \lambda\right)^{k}\left(\left(\widehat{D} - \lambda\right)\left(e^{\lambda x} y\right)\right) =$$

$$= \left(\widehat{D} - \lambda\right)^{k}\left(\left(e^{\lambda x} y\right)' - \lambda e^{\lambda x} y\right) =$$

$$= \left(\widehat{D} - \lambda\right)^{k}\left(e^{\lambda x} y'\right) = e^{\lambda x}\left(y'\right)^{(k)} = e^{\lambda x} y^{(k+1)} \, ,$$

что доказывает третью формулу, приведенную в формулировке теоремы.

`Теорема доказана.`

Заметим, что второе и третье соотношения в формулировке теоремы 2.2.1 часто называются *формулами сдвига.*

В заключение продемонстрируем, как использование дифференциальных многочленов позволяет свести решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка к последовательному решению двух уравнений 1-го порядка (т.е. использованию теоремы 2.1.4).

`Задача 2.2.1` Решить уравнение $y'' + 2y' + \alpha y = 0$ при $\alpha = -3$ и при $\alpha = 1$.

`Решение.` 1°. Пусть $\alpha = -3$. Уравнение $y''+2y'-3y = 0$ с помощью дифференциальных многочленов записывается в виде

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} - 3)y = 0 \quad \text{или} \quad (\widehat{D} - 1)(\widehat{D} + 3)y = 0\,.$$

Обозначим

$$(\widehat{D} + 3)y = u(x) \tag{2.2.4}$$

и решим вначале однородное уравнение $(\widehat{D} - 1)u = 0$, т. е. $u' - u = 0$. Получим $u(x) = \tilde{C}_1 e^x \quad \forall \tilde{C}_1$.

Уравнение (2.2.4) принимает вид

$$(\widehat{D} + 3)y = \tilde{C}_1 e^x \quad \text{или} \quad y' + 3y = \tilde{C}_1 e^x\,. \tag{2.2.5}$$

Это *нерезонансный* случай, т. к. $-3 = \lambda \neq \lambda_1 = 1$, и согласно теореме 2.1.4 частное решение неоднородного уравнения (2.2.5) следует искать в виде $y^*(x) = d_0\, e^x$. Подстановка последней формулы в (2.2.5) дает

$$d_0 = \frac{\tilde{C}_1}{4} = C_1 \quad \forall C_1\,.$$

Поскольку общее решение однородного уравнения (2.2.5) есть $y_0(x) = C_2 e^{-3x} \quad \forall C_2$, то общее решение (2.2.5) (а, значит, и исходного уравнения) представимо в виде

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \quad \forall C_1, C_2\,.$$

2°. Пусть теперь $\alpha = 1$. Уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ при помощи дифференциальных многочленов можно записать так:

$$(\widehat{D}^2 + 2\widehat{D} + 1)y = 0\,, \quad \text{или} \quad (\widehat{D} + 1)^2 y = 0\,,$$

$$\text{или же, как} \quad (\widehat{D} + 1)(\widehat{D} + 1)y = 0\,.$$

Обозначив

$$(\widehat{D} + 1)y = u(x)\,, \tag{2.2.6}$$

решим однородное уравнение $(\widehat{D}+1)u = 0$, или, что то же самое, уравнение $u' + u = 0$. Его общим решением будет множество функций вида $u(x) = C_1 e^{-x} \quad \forall C_1$.

Теперь решаем уравнение (2.2.6)

$$(\widehat{D} + 1)y = C_1 e^x \quad \text{или} \quad y' + y = C_1 e^x\,. \tag{2.2.7}$$

Это *резонансный* случай поскольку $-1 = \lambda = \lambda_1 = -1$, и по теореме 2.1.4 частное решение неоднородного уравнения (2.2.7) следует искать в виде $y^*(x) = x\, d_0\, e^x$.

Подстановка последней формулы в уравнение (2.2.7) дает $d_0 = C_1 \quad \forall C_1$, и, следовательно, $y^*(x) = C_1\, x\, e^x$.

Поскольку общее решение однородного уравнения (2.2.7) является множеством квазимногочленов нулевого порядка $y_0(x) = C_2 e^{-x} \quad \forall C_2$, то общее решение (2.2.7) (а, значит, и исходного уравнения) имеет вид

Решение получено.

$$y(x) = y^*(x) + y_0(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} \quad \forall C_1, C_2\,.$$