А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА 2020, верс. 06окт2020г.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим приведенное линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\ . \tag{2.3.1}$$

Пусть *попарно не равные друг другу* корни его характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\ , \tag{2.3.2}$$

суть числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$, имеющие соответственно кратности равные $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s$.

В этом случае уравнение (2.3.2) может быть записано так:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} = 0 \ ,$$

при этом, как известно из курса алгебры, $k_1 + k_2 + \ \ldots \ + k_s = n$.

Используя дифференциальные многочлены, уравнение (2.3.2) представим в виде

$$L(\widehat{D})\, y(x) = 0 \ ,$$

поскольку характеристический многочлен уравнения (2.3.1) будет

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

а соответствующий дифференциальный многочлен:

$$L(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1} (\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s} \ .$$

Покажем, что справедлива

Теорема 2.3.1 **Общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_s(x)e^{\lambda_s x}\ , \quad (2.3.3)$$

где $P_j(x)\ \forall j = [1, s]$ **суть алгебраические многочлены вида** $\sum\limits_{m=1}^{k_j} C_{jm}x^{m-1}$, **а** C_{jm} **– произвольные комплексные константы.**

`Доказательство.`

Вначале покажем, что каждое решение уравнения (2.3.1) имеет вид (2.3.3).

Воспользуемся методом математической индукции. Доказываемая теорема при $n = 1$ верна в силу теоремы 1.3.1 и предположим, что она теорема верна для уравнения порядка $n - 1$.

Запишем дифференциальный оператор $L(\widehat{D})$ в виде

$$L(\widehat{D}) = M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s) \ ,$$

где

$$M(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1} (\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s - 1} \ .$$

В этом случае уравнение $L(\widehat{D})\,y(x) = 0$ можно записать как

$$M(\widehat{D})(\widehat{D} - \lambda_s)\,y(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad M(\widehat{D})\,u(x) = 0\,,$$

положив $(\widehat{D} - \lambda_s)\,y(x) = u(x)\,.$

Уравнение $M(\widehat{D})\,u(x) = 0$ линейное однородное, порядка $n-1$. Если $k_s \geq 2$, то корнями его характеристического уравнения являются числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ кратности $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s - 1$ соответственно.
Если же кратность $k_s = 1$, то корнями характеристического уравнения будут только числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{s-1}$ с кратностями $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{(s-1)}\,.$

По индуктивному предположению решение уравнения $M(\widehat{D})u(x) = 0$ имеет вид:

– в случае, если $k_s \geq 2$

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + Q_s(x)e^{\lambda_s x},$$

где $Q_1(x),\ \ldots,\ Q_{s-1}(x)$ — алгебраические многочлены степени $k_1 - 1,\ \ldots, k_{(s-1)} - 1$, а многочлен $Q_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$;

– в случае, если $k_s = 1$

$$u(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x},$$

то есть слагаемое с индексом s здесь отсутствует.

Найдем теперь вид функции $y(x)$ из уравнения

$$(\widehat{D} - \lambda_s)y(x) = u(x) \tag{2.3.4}$$

или (что то же самое) из $\quad y' - \lambda_s y = u(x)$.

Это уравнение первого порядка, правая часть которого есть сумма квазимногочленов. Применив теорему 2.1.4, непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае, когда $k_s = 1$, частное решение для (2.3.4) имеет вид (*резонанса* нет)

$$y^*(x) = R_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + R_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x},$$

а общее решение однородного уравнения (в силу теоремы 1.3.1) – $y_0(x) = C \cdot e^{\lambda_s x}$. Сумма $y^*(x) + y_0(x)$ есть функция, указанная в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_s \geq 2$. Для уравнения (2.3.4) это *резонансный* случай. Поэтому по теореме 2.1.4 частным решением уравнение (2.3.4) будет функция

$$y^*(x) = R_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + R_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + xR_s(x)e^{\lambda_s x},$$

в котором многочлен $R_s(x)$ имеет порядок $k_s - 2$.

Таким образом при $k_s \geq 2$ в сумме $y^*(x) + y_0(x)$ возникает слагаемое вида $\Big(xR_s(x) + C\Big)e^{\lambda_s x}$, которое является квазимногочленом порядка $k_s - 1$, содержащим k_s произвольных комплексных констант.

Итак, мы получили, что общее решение уравнения (2.3.4) имеет вид (2.3.3).

Осталось убедиться, что любая функция вида (2.3.3) есть решение уравнения (2.3.1). Для этого достаточно показать, что если λ_0 – корень кратности k уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций

$$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\ x^2 e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_0 x} \tag{2.3.5}$$

есть решение уравнения $L(\widehat{D})y = 0$.

Дифференциальный многочлен уравнения (2.3.1), как было показано ранее, имеет вид

$$L(\widehat{D}) = (\widehat{D} - \lambda_1)^{k_1} (\widehat{D} - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\widehat{D} - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем среди образующих его сомножителей обязательно имеется множитель $(\widehat{D} - \lambda_0)^k$.

Результат действия этого оператора на функцию $x^m e^{\lambda_0 x}$, где целое число $m \in [0, k-1]$, можно получить, использовав вторую *формулу сдвига* (2.2.2).

Действительно, согласно формуле (2.2.2),

$$(\widehat{D} - \lambda_0)^k \Big(x^m e^{\lambda_0 x}\Big) = e^{\lambda_0 x} \big(x^m\big)^{(k)} = 0\,.$$

Откуда следует, что функция $y(x) = x^m e^{\lambda_0 x}$ удовлетворяет условию $L(\widehat{D})y = 0$ и, значит, является частным решением однородного уравнения (2.3.1).

`Теорема доказана.`

Следствие 2.3.1 **Если все корни характеристического уравнения (2.3.2)** $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ **простые (то есть кратности единица), то общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}\ , \qquad (2.3.6)$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ **– произвольные комплексные константы.**

Доказательство.

Очевидно следует из утверждения теоремы 2.3.1.

Следствие доказано.

Следствие 2.3.2 **Линейное пространство, образованное частными решениями уравнения (2.3.1), конечномерное. Базисом в этом пространстве может служить, например, любой упорядоченный набор, составленный из следующих n функций:**

Таблица 2.3.1.

$e^{\lambda_1 x}$	$e^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$e^{\lambda_s x}$
$xe^{\lambda_1 x}$	$xe^{\lambda_2 x}$	$\ldots$	$xe^{\lambda_s x}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$\ldots$	$\ldots$	$x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$
	$x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$		

`Доказательство.`

Следует из линейной независимости данного набора функций, равенства $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ и утверждения теоремы 2.3.1.

`Следствие доказано.`

Заметьте, что число заполненных клеток таблицы 2.3.1, вообще говоря, различно для разных ее столбцов, поскольку корни характеристического уравнения могут иметь разные кратности.

Выделение вещественных решений

Достаточно часто в вычислительной практике оказывается, что уравнение (2.3.1) имеет *вещественные* коэффициенты

$$y^{(n)} + \rho_1 y^{(n-1)} + \ldots + \rho_{n-1} y' + \rho_n y = 0 \tag{2.4.1}$$

и требуется найти все его вещественные решения. Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1} \lambda + \rho_n = 0\ . \tag{2.4.2}$$