# Выделение вещественных решений

Достаточно часто в вычислительной практике оказывается, что уравнение (2.3.1) имеет *вещественные* коэффициенты

$$y^{(n)} + \rho_1 y^{(n-1)} + \ldots + \rho_{n-1} y' + \rho_n y = 0 \tag{2.4.1}$$

и требуется найти все его вещественные решения. Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \rho_{n-1} \lambda + \rho_n = 0\ . \tag{2.4.2}$$

Получим формулу общего вещественного решения этого уравнения, предполагая, что комплексные решения, определяемые формулой (2.3.3) нами уже найдены.

Убедимся вначале, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.4.1 **Пусть уравнение (2.4.2) имеет комплексный корень $\lambda_0$ кратности $k$, то есть верно равенство**

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k M_{n-k}(\lambda),$$

**где $M_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда оно имеет корень $\overline{\lambda}_0$, причем той же кратности $k$.**

Доказательство.

В силу вещественности коэффициентов в уравнении (2.4.2) и согласно свойствам комплексного сопряжения

$$L(\overline{\lambda}_0) = \overline{\lambda}_0^{\,n} + \rho_1 \overline{\lambda}_0^{\,n-1} + \ldots + \rho_{n-1}\overline{\lambda}_0 + \rho_n = \overline{L(\lambda_0)} = \overline{0} = 0\ .$$

Из того условия, что $\lambda_0$ есть корень кратности $k$ характеристического уравнения (2.4.2), используя для нахождения $L^{(m)}(\lambda)\ \ \forall m \in [1, k-1]$ формулу Лейбница, аналогичными рассуждениями получаем, что

$$L'(\overline{\lambda}_0) = L''(\overline{\lambda}_0) = \ldots = L^{(k-1)}(\overline{\lambda}_0) = 0, \text{ причем } L^{(k)}(\overline{\lambda}_0) \neq 0,$$

а это дает $\quad L(\lambda) = (\lambda - \overline{\lambda}_0)^k M_{n-k}(\lambda)\ , \quad M_{n-k}(\overline{\lambda}_0) \neq 0\,.$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.2 **Для того чтобы комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ являлась решением уравнения (2.3.1), необходимо и достаточно, чтобы вещественные функции $u(x)$ и $v(x)$ также были решениями этого уравнения.**

Доказательство.

Из линейности дифференциального многочлена, условия равенства комплексных чисел и соотношений

$$L(\widehat{D})y(x) = L(\widehat{D})\left(u(x) + iv(x)\right) = L(\widehat{D})u(x) + iL(\widehat{D})v(x)$$

следует, что

$$L(\widehat{D})y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L(\widehat{D})\left(u(x) + iv(x)\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\widehat{D})u(x) = 0\,, \\ L(\widehat{D})v(x) = 0\,. \end{array} \right.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.3 **Пусть комплексно сопряженные функции**

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad \text{и} \quad \overline{y}(x) = u(x) - iv(x)$$

**линейно независимы на промежутке** $X$. **Тогда будут линейно независимыми вещественные функции** $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ **и** $v(x) = \operatorname{Im} y(x)$.

Доказательство.

Заметим предварительно, что

$$u(x) = \frac{y(x) + \overline{y}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v(x) = \frac{y(x) - \overline{y}(x)}{2i}\,.$$

Из условия

$$\varkappa\, u(x) + \mu\, v(x) = 0 \quad \forall x \in X, \tag{2.4.3}$$

равенств

$$0 = \varkappa\, u(x) + \mu\, v(x) = \varkappa \frac{y(x) + \overline{y}(x)}{2} + \mu \frac{y(x) - \overline{y}(x)}{2i} =$$

$$= \left(\frac{\varkappa}{2} + \frac{\mu}{2i}\right) y(x) + \left(\frac{\varkappa}{2} - \frac{\mu}{2i}\right) \overline{y}(x)$$

и в силу линейной независимости $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ получаем, что выражения в круглых скобках должны быть равны нулю одновременно.

Тогда, приняв во внимание равенство $\dfrac{1}{i} = -i$, получаем:

$$\begin{cases} \varkappa - i\mu & = & 0\,, \\ \varkappa + i\mu & = & 0\,. \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений имеет по теореме Крамера единственное решение $\varkappa = \mu = 0$. Значит, функции $u(x)$ и $v(x)$ линейно независимы, поскольку оказалось, что из равенства (2.4.3) следует $\varkappa = \mu = 0$.

`Лемма доказана.`

| | | | |
|---|---|---|---|
| $e^{\lambda_1 x}$ | $e^{\lambda_2 x}$ | $\dots$ | $e^{\lambda_s x}$ |
| $xe^{\lambda_1 x}$ | $xe^{\lambda_2 x}$ | $\dots$ | $xe^{\lambda_s x}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $\dots$ | $\dots$ | $x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$ |
| | $x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$ | | |

Теперь опишем процедуру выделения вещественных решений из общего решения уравнения (2.4.1).

В силу леммы 2.4.1 для $\lambda_r = \alpha_r + i\beta_r$ – каждого невещественного (то есть, с $\beta_r \neq 0$) корня кратности $k_r$ характеристического уравнения (2.4.2) – будет существовать сопряженный корень $\overline{\lambda}_r = \alpha_r - i\beta_r$ , причем той же кратности. Следовательно, в таблице 2.3.1 для каждой базисной функции $y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x}$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, k_r - 1$ , найдется сопряженная ей функция $\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x}$. Действительно, по формуле Эйлера

$$y_{qr}(x) = x^q e^{\lambda_r x} = x^q e^{(\alpha_r + i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x + i\sin\beta_r x) \quad \text{и}$$

$$\overline{y}_{qr}(x) = x^q e^{\overline{\lambda}_r x} = x^q e^{(\alpha_r - i\beta_r)x} = x^q e^{\alpha_r x}(\cos\beta_r x - i\sin\beta_r x)\ .$$

Поэтому вещественные, линейно независимые функции

$$u_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x) = x^q e^{\alpha_r x}\sin\beta_r x$$

будут, согласно лемме 2.4.2, решениями уравнения (2.4.1).

Перейдем в линейном пространстве решений от базиса, содержащегося в таблице 2.1, к новому базису, заменив каждую пару функций $\{\ y_{qr}(x),\ \overline{y}_{qr}(x)\ \}$ на пару функций $\{\ u_{qr}(x),\ v_{qr}(x)\ \}$. Заметим при этом, что в силу леммы 2.4.3 из линейной независимости функций $y_{qr}(x)$, $\overline{y}_{qr}(x)$ и соотношений

$$u_{qr}(x) = \frac{y_{qr}(x) + \overline{y}_{qr}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad v_{qr}(x) = \frac{y_{qr}(x) - \overline{y}_{qr}(x)}{2i}$$

следует линейная независимость функций $u_{qr}(x),\ v_{qr}(x)$ .

Новый базис состоит из $n$ вещественных функций, которые обозначим как $\psi_j(x)$. В нем любое вещественное решение уравнения (2.4.1) представимо как некоторая вещественная линейная комбинация функций $\psi_j(x)$.

Таким образом, доказана

`Теорема 2.4.1` **Общее вещественное решение уравнения (2.4.1) имеет вид**

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j \psi_j(x)\ ,$$

**где $R_j$ – произвольные вещественные константы.**

В заключение рассмотрим простой, но очень важный для физических и технических приложений пример.

`Задача 2.4.1` Найти все вещественные решения уравнения $y''+\omega^2 y = 0$, если $\omega > 0$.

`Решение.` Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. У него есть два сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, кратности 1 каждое. Поэтому общее комплексное решение исходного уравнения будет

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}.$$

По формуле Эйлера $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$. Значит

$$u(x) = \mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \cos\omega x \quad \text{и}$$

$$v(x) = \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}} = \sin\omega x.$$

Переходя в $E^2$ – в линейном пространстве решений исходного уравнения – от базиса $\left\{e^{i\omega x};\ e^{-i\omega x}\right\}$ к базису $\{\cos\omega x;\ \sin\omega x\}$, получаем окончательно

$$y(x) = R_1\cos\omega x + R_2\sin\omega x\ ,$$

`Решение получено.` где $R_1$ и $R_2$ – произвольные вещественные константы.

# Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \;, \tag{2.5.1}$$

предполагая, что общее решение соответствующего однородного уравнения уже найдено.

Как и ранее, числа

$$\{\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n \,\}$$

являются произвольными комплексными константами, а $b(x)$ есть комплекснозначная, непрерывная функция, зависящая от вещественного аргумента $x \in X$.

Согласно следствию 2.1.2 для построения общего решения неоднородного уравнения (2.5.1) достаточно найти какое-нибудь его частное решение.

Мы воспользуемся методом *вариации постоянных* (методом Лагранжа), основой которого является

`Теорема 2.5.1` **Пусть общее решение** *однородного* **уравнения (2.5.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \cdots + C_n g_n(x) \ ,$$

**где функции** $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$ **образуют базис в пространстве частных решений однородного уравнения. Тогда** *неоднородное* **уравнение (2.5.1) имеет решение вида**

$$y^*(x) = C_1(x) g_1(x) + C_2(x) g_2(x) + \cdots + C_n(x) g_n(x) \ ,$$

**где непрерывно дифференцируемые функции** $\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots\ C_n(x)\}$ **находятся из системы линейных уравнений:**

$$\begin{cases} C_1'(x) g_1(x) + C_2'(x) g_2(x) + \cdots + C_n'(x) g_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1'(x) + C_2'(x) g_2'(x) + \cdots + C_n'(x) g_n'(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1''(x) + C_2'(x) g_2''(x) + \cdots + C_n'(x) g_n''(x) \ = \ 0 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x) g_1^{(n-1)}(x) \ + \ \ldots \ + \ C_n'(x) g_n^{(n-1)}(x) \ = \ b(x) \ . \end{cases}$$

`Доказательство.`

Найдем выражения для производных от функции $y^*(x)$ до $n-$го порядка включительно, используя следующую процедуру.

$$\text{Если } y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k \ , \quad \text{то} \quad {y^*}' = \sum_{k=1}^{n} (C'_k g_k + C_k g'_k) \ .$$

Потребуем, кроме того, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} C'_k g_k = 0$ , ибо в этом случае ${y^*}' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k g'_k$, то есть формула для производной упрощается.

Дифференцируя еще раз, получаем, что

$${y^*}'' = \sum_{k=1}^{n} C_k g''_k \ , \quad \text{при условии, что } \sum_{k=1}^{n} C'_k g'_k = 0 \ .$$

Эту процедуру последовательно выполняем до получения формул

$$y^{*(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k g_k^{(n-1)}, \quad \text{при условии, что } \sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-2)} = 0 \ .$$

и

$$y^{*(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left( C_k g_k^{(n)} + C'_k g_k^{(n-1)} \right) \ .$$

Теперь, подставляя полученные выражения для функции $y^*(x)$ и ее производных в уравнение (2.5.1), приходим к

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left( g_k^{(n)} + \ldots + a_{n-1} g'_k + a_n g_k \right) + \sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

а учитывая, что каждая функция $g_k(x)$ есть частное решение *однородного* уравнения (2.5.1), (т.е., что выражения в больших круглых скобках равны нулю), получаем условие

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(n-1)} = b(x) \ ,$$

которое, в совокупности с использованными ранее равенствами

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k g_k^{(j)} = 0 \quad \forall j = [0, n-2],$$

образует систему уравнений, указанную в условии теоремы.

В матричной форме данная система имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} g_1(x) & g_2(x) & \ldots & g_n(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) & \ldots & g'_n(x) \\ g''_1(x) & g''_2(x) & \ldots & g''_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \ldots & g_n^{(n-1)}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ \ldots \\ C'_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ b(x) \end{array} \right\| \ . \qquad (2.5.2)$$

В § 5.3 (теорема 5.3.3) будет показано, что определитель основной матрицы системы (2.5.2) (называемый определителем Вронского или *вронскианом*) отличен от нуля для системы линейно независимых функций $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$, являющихся частными решениями однородного уравнения (2.5.1). Поэтому, в силу теоремы Крамера, функции $C'_k(x), \forall k = [1, n]$ существуют и единственны.

Теорема доказана.

Следствие 2.5.1 **Уравнение (2.5.1) интегрируется в квадратурах.**

Доказательство.

Следует из утверждения теоремы 2.5.1 и очевидной возможности представления каждой функции

$$C_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} C'_k(u)du \quad \forall k = [1, n]\ ,$$

то есть в виде интеграла с переменным верхним пределом.

Следствие доказано.