В завершение описания случая существования базиса из собственных векторов линейного преобразования с матрицей $\|\hat{A}\|$, рассмотрим случай, когда матрица исходной системы уравнений вещественна, а из общего комплексного решения нужно выделить вещественные решения.

В этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис.

Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары. То есть процедура этого выделения в точности совпадает с методом, примененным для уравнения n-го порядка, за исключением некоторых технических деталей, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

`Задача 3.1.2` Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = 3x_1(t) + x_3(t). \end{cases}$$

`Решение.` Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{rrr} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right\| = 0 \implies (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = 0.$$

$$\text{Или } (\lambda - 1)\left((\lambda-1)^2 + 4\right) = 0, \text{ откуда } \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda \widehat{E}\| \|f\| = \|o\|$.

Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \ \ 1 \ \ -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0 \ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0 \ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i \ 1 \ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \| -2i \ 1 \ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi(t) = \begin{Vmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re}\Phi(t) + i\operatorname{Im}\Phi(t)$. Найдем $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\operatorname{Im}\Phi(t)$. Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi(t) = \left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t\right) =$$

$$= \left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} e^t \cos 2t - \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} e^t \sin 2t \right) +$$

$$+i \left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} e^t \sin 2t + \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} e^t \cos 2t \right) .$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

где $R_1,\ R_2$ и R_3 – произвольные вещественные постоянные.

Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, задаваемого в U^n матрицей $\|A\|$.

Действительно, из курса линейной алгебры известно, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению кратности k, не меньше, чем единица, но не больше, чем k. Поэтому максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению кратности $k \geq 2$, может оказаться строго меньше, чем k. Это, в свою очередь, будет означать, что полное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\|A\|$ окажется меньше n – размерности U^n, ибо полное число корней характеристического уравнения (с учетом их кратности) всегда равно n. И, следовательно, в линейном пространстве частных решений системы уравнений (3.1.1) не удается построить базис вида, указанного в формулировке теоремы 3.1.3.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\|. \tag{3.2.1}$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l. У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали, равны единице, а остальные элементы нули.

Матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая некоторое линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в U^l, имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l, которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \dots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку $\operatorname{rg} \|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0 \widehat{E}\| = l - 1$. Иначе говоря, размерность собственного подпространства равна единице и базис из собственных векторов $\|J_l(\lambda_0)\|$ в U^l не существует.

Здесь отметим, что, элементы базиса в U^l, в котором преобразование $\|\widehat{A}\|$ имеет матрицу вида жордановой клетки (3.2.1), должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \;, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \;, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \;, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \;, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \;, & \Longrightarrow & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \;, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \;.
\end{array} \tag{3.2.2}$$

Действительно, согласно определению матрицы линейного преобразования, ее столбцами (в некотором конкретном базисе $\{\ \|h_{(1)}\|,\ \|h_{(2)}\|,\ \ldots,\ \|h_{(l)}\|\ \}$) являются координатные столбцы *образов базисных элементов*. Тогда, учитывая структуру матрицы (3.2.1), мы приходим к формулам (3.2.2).

Покажем, что в пространстве частных решений системы (3.1.1) возможно построить базис, позволяющий описать ее общее решение, добавив к собственным векторам $\|A\|$ дополнительные элементы пространства U^n, определяемые формулами (3.2.2).

Пусть λ_0 – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в U^n. Тогда можно дать

Определение 3.2.1

Элементы $\|h_{(1)}\|, \ \|h_{(2)}\|, \ \dots \ , \|h_{(l)}\|$, принадлежащие U^l и являющиеся решениями уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \ , \\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ , \\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \ ,
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

в то время как уравнение

$$\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длины l, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

Элементы $\|h_{(2)}\|, \ \|h_{(3)}\|, \ \dots \ , \|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Заметим также, что уравнения (3.2.3) можно записать в других формах, а именно, если обозначить $\|\widehat{B}\| = \|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\|$, то в виде

$$
\begin{array}{lcl}
\|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^2\|h_{(2)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^3\|h_{(3)}\| = \|o\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \,, \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^l\|h_{(l)}\| = \|o\| \,.
\end{array}
\tag{3.2.4}
$$

Опишем теперь основные свойства жордановых цепочек.

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в U^l, являющихся**
– какой-либо жордановой цепочкой;
– либо объединением нескольких различных жордановых цепочек,
линейно независимое.

Доказательство.

Докажем первое утверждение.

Из соотношений (3.2.4) следует, что

$$\|\widehat{B}\|^s\|h_{(s+1)}\| = \|h_{(1)}\| \quad \forall s = [1, l-1]$$

и (3.2.5)

$$\|\widehat{B}\|^r\|h_{(s+1)}\| = \|o\| \quad \forall r > s,\ \forall s = [1, l-1]\ ,$$

поскольку результат умножения матрицы $\|\widehat{B}\|$ на присоединенный вектор есть или присоединенный вектор с номером на единицу меньшим, или же нулевой столбец. Действительно, $\forall s = [1, l-1]$

$$\|\widehat{B}\|^s\|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1}\|\widehat{B}\|\|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1}\|h_{(s)}\| = \dots$$

$$\dots = \|\widehat{B}\|^2\|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\|\|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\|\ .$$

Пусть

$$C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \ldots\ + C_l\|h_{(l)}\| = \|o\|\ .$$

Покажем, что в этом случае линейная комбинация в левой части равенства тривиальная.

Действительно, умножив обе части равенства на $\|\widehat{B}\|^{l-1}$, получим:

$$\|\widehat{B}\|^{l-1}\left(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \ldots\ + C_l\|h_{(l)}\|\right) = \|o\|\ ,$$

$$C_1\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(1)}\| + C_2\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(2)}\| + \ \ldots\ + C_l\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(l)}\| = \|o\|$$

или (с учетом (3.2.5))

$$C_l\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_l = 0\ .$$

Затем, подставив $C_l = 0$ и умножив обе части на $\|\widehat{B}\|^{l-2}$, получим

$$C_{l-1}\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_{l-1} = 0$$

и т.д.

А из тривиальности рассматриваемой линейной комбинации следует справедливость первого утверждения теоремы.

Второе утверждение доказывается аналогично.

`Теорема доказана.`

В курсе линейной алгебры также доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

`Теорема 3.2.2 (Жордана)` **Для любого линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n существует базис (называемый** *жордановым***), образованный из всех жордановых цепочек для всех попарно различных собственных значений этого преобразования.**

Определение 3.2.2	*Жордановым блоком*, отвечающим собственному значению λ_0 кратности k с q-мерным собственным подпространством, назовем квадратную, порядка k, блочно-диагональную матрицу $\lVert J(\lambda_0) \rVert$ вида $$\left\lVert \begin{array}{cccc} \lVert J_{l_1}(\lambda_0) \rVert & \lVert O \rVert & \ldots & \lVert O \rVert \\ \lVert O \rVert & \lVert J_{l_2}(\lambda_0) \rVert & \ldots & \lVert O \rVert \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lVert O \rVert & \lVert O \rVert & \ldots & \lVert J_{l_q}(\lambda_0) \rVert \end{array} \right\rVert ,$$ где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\lVert J_{l_1} \rVert$, $\lVert J_{l_2} \rVert$, $\ldots$, $\lVert J_{l_q} \rVert$, суть жордановы клетки вида (3.2.1), отвечающие собственному значению λ_0 и каждому из q линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины $l_1,\ l_2,\ \ldots\ l_q$. Через $\lVert O \rVert$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Отметим, что при этом сумма порядков (размеров) жордановых клеток в блоке, равна кратности собственного значения λ_0, то есть

$$l_1 + l_2 + \ldots\ + l_q = k\ .$$

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\lVert \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\rVert \qquad \left\lVert \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\rVert \qquad \left\lVert \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\rVert .$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n, заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} \;\; ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Определение 3.2.3

Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде (см. рис. 3.1)

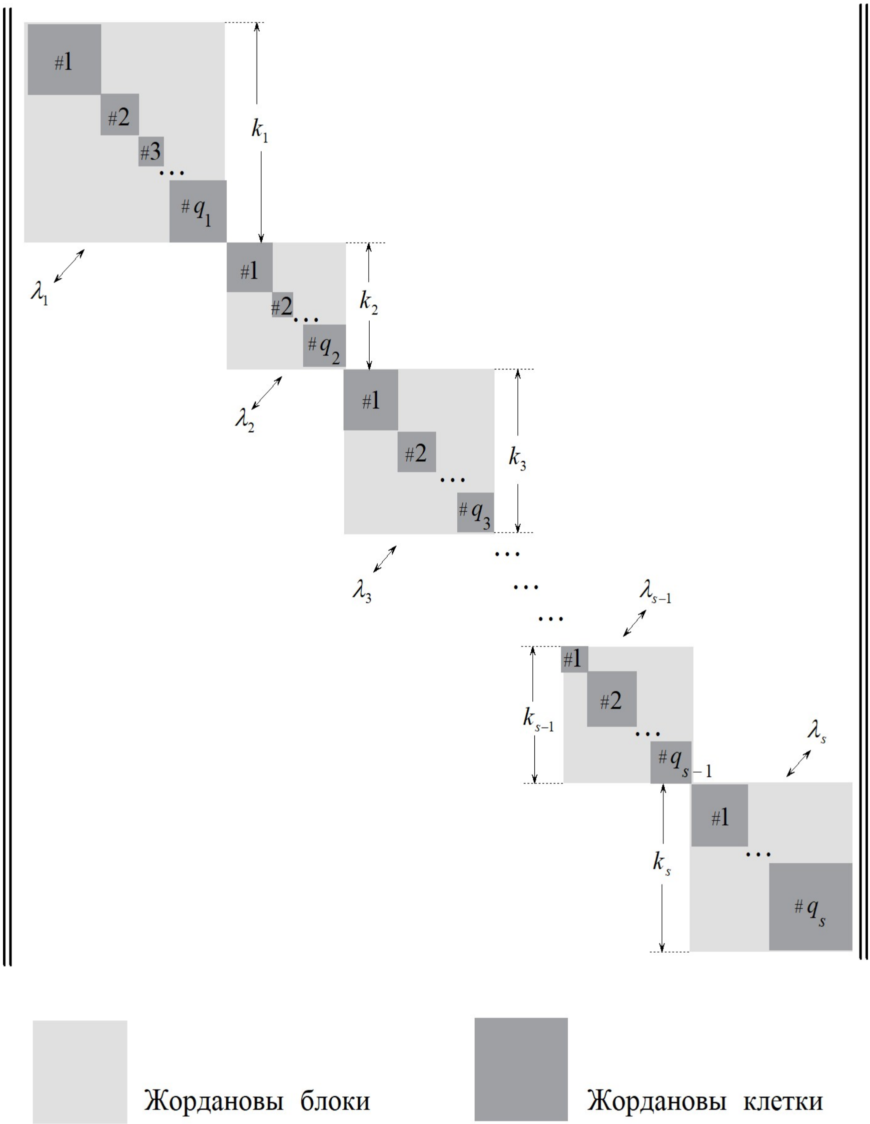
$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J(\lambda_1)\| & \|\,O\,\| & \ldots & \|\,O\,\| \\ \|\,O\,\| & \|J(\lambda_2)\| & \ldots & \|\,O\,\| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \|\,O\,\| & \|\,O\,\| & \ldots & \|J(\lambda_m)\| \end{array} \right\| ,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы

$$\|J(\lambda_1)\|,\ \|J(\lambda_2)\|,\ \ldots\ \|J(\lambda_m)\|$$

являются жордановыми блоками, отвечающими попарно различным собственным значениям преобразования $\widehat{A}$, а через $\|\,O\,\|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Резюмируя определения (3.2.1) – (3.2.3), можно сказать, что матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены m жордановых блоков, где m – число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы – нули.



Здесь символ # означает номер клетки в блоке

Рис. 1. Нормальная жорданова форма матрицы.

Итак: жорданов блок с номером s есть квадратная подматрица порядка k_s, (k_s – кратность λ_s) состоящая из q_s жордановых клеток, где q_s – максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_s, равное размерности его собственного подпространства. На главной диагонали каждого блока расположено λ_s – собственное значение, которому этот блок соответствует.

С другой стороны, q_s равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_s, и для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Теорема 3.2.3 **Матрица каждого линейного преобразования в U^n имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.**

Доказательство.

По определению столбцами матрицы линейного оператора в конкретном базисе служат координатные представления образов базисных элементов.

Пусть базис жорданов и состоит из объединения всех жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям матрицы $\|A\|$, то есть имеет вид

$$\left\{\ldots\ ,\ \|h_{(s1)}\|,\ \|h_{(s2)}\|,\ \ldots\ ,\|h_{(sl)}\|\ ,\ \ldots\right\},$$

где s – номер цепочки. Тогда первый из наборов равенств (3.2.2) можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов по жорданову базису, которые существуют и единственны.

Значит, координатное представление образа каждого базисного элемента является столбцом, у которого все компоненты нулевые, за исключением одного, равного λ_{0s}, или двух, равных 1 и λ_{0s} соответственно.

Следовательно матрица $\|A\|$ в жордановом базисе имеет жорданову форму.

Теорема доказана.

Воспользуемся этой теоремой для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{array} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в U^n к жорданову базису.

Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем (как показывается в курсе линейной алгебры) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые, а, значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и одинаковой кратности.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ по формуле

$$\| \, x(t)\| = \|S\| \| \, y(t)\|$$

или

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \, y_j(t) \quad \forall i = [1, n], \tag{3.2.6}$$

получим $\quad \|S\|\|\dot{y}\| = \|A\|\|S\|\|y\| \quad$ или $\quad \|\dot{y}\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\|y\|$
и, окончательно,

$$\|\dot{y}\| = \|J\|\|y\|, \tag{3.2.7}$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой жордановой клетки отдельно.

Например, для самой первой клетки, положив $\lambda = \lambda_1$ и $l = l_1$, имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\begin{Vmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \ , \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \ , \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l \ , \\ \dot{y}_l = \lambda y_l \ . \end{cases}$$

Последнюю систему удобнее решать, сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \;\; \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t)$ $\forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \ , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) \ , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) \ , \\ \dot{u}_l(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$\begin{aligned} & u_l(t) = C_l \ , \\ & u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ , \\ & u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ , \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ . \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} & y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1} \Big) e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \right) e^{\lambda t} \ , \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t} \ . \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Проведя аналогичные вычисления для всех клеток во всех жордановых блоках, получим общее решение системы уравнений (3.2.7).

Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид**

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall i = [1, n] \ ,$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_q$ **— все** *попарно различные* **собственные значения преобразования, заданного матрицей** $\|A\|$, **а** $P_{ij}(t)$ **— алгебраический многочлен:**

- **степень которого на единицу меньше максимальной из длин жордановых цепочек, отвечающих собственному значению** λ_j ;
- **и коэффициенты которого зависят от** n **произвольных комплексных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Заметьте, что набор констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ должен быть *одинаков* для всех многочленов $P_{ij}(t)$.

В заключение обсуждения вопроса о построении общего решения системы (3.1.1) сделаем некоторые замечания.

1) Из теоремы 3.2.4 следует, что общее решение системы (3.1.1) можно искать методом неопределенных коэффициентов, формально не прибегая к построению жорданова базиса. Возможный вариант такого подхода описан в Приложении.

2) В случае вещественной матрицы $\|A\|$ выделение вещественного решения выполняется тем же методом, что был рассмотрен ранее.

3) Для задач с невысокой размерностью, которые часто встречаются в приложениях, целесообразно использовать итоговые формулы (3.2.8) для общих решений, записанные в более удобном для запоминания формате.

Приведем их в исходных переменных (без вывода) для $n = 2,\ 3$, исключая случаи, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.3.

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda t} + C_2 \left(\|h_{(1)}\| t + \|h_{(2)}\| \right) e^{\lambda t} \,, \tag{3.2.9}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда λ_1 простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t}\ .$$

Если в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t}\ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) +$$

$$+C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg)e^{\lambda t}\ .$$

Во всех формулах $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные константы.

Следует заметить, что использование теоремы Жордана возможно потребует бóльших затрат вычислительных ресурсов, чем представляется изначально.

Дело в том, что жорданова цепочка, вообще говоря, может начинаться не с любого собственного вектора, отвечающего конкретному собственному значению. Например, в U^3 линейное преобразование, заданное матрицей

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

имеет троекратное нулевое собственное значение и, соответствующее ему, двумерное собственное подпространство.

Убедитесь непосредственной проверкой, что для собственного вектора $\|1\ 0\ 0\|^{\mathrm{T}}$ присоединенные векторы существуют, а для $\|0\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ – нет. То есть, для построения жордановой цепочки предварительно надо найти те собственные векторы, для которых уравнения (3.2.2) разрешимы.