Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему вида

$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \quad \forall t \in T \subset R^1, \tag{3.3.1}$$

где коэффициенты матрицы $\|A\|$ комплексные константы. Комплекснозначную непрерывную вектор-функцию $\|b(t)\|$, будем называть для краткости *неоднородностью.*

Теорема 3.3.1 **Общее решение неоднородной системы (3.3.1) представимо как сумма общего решения однородной системы (3.1.1) и частного решения той же неоднородной системы (3.3.1).**

Доказательство.

Пусть $\|x^*(t)\|$ – частное решение неоднородной системы (3.3.1), а $\|y(t)\|$ – произвольное решение однородной. Тогда

$$\|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\| \quad \text{и}$$

$$\|\dot{y}(t)\| \ \ = \|A\|\|y(t)\| \, .$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\|\dot{y}(t)\| + \|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\Bigg(\|y(t)\| + \|x^*(t)\|\Bigg) + \|b(t)\| \, ,$$

то есть $\|x(t)\| = \|y(t)\| + \|x^*(t)\|$ – произвольное решение неоднородной системы (3.3.1).

Обратно, пусть $\|x(t)\|$ – произвольное частное решение неоднородной системы, а $\|x^*(t)\|$ – некоторое фиксированное частное решение неоднородной. Сделаем замену неизвестной $\|x(t)\| = \|y(t)\| + \|x^*(t)\|$. Тогда

$$\|\dot{y}(t)\| + \|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|y(t)\| + \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\| \, ,$$

и, поскольку $\|\dot{x}^*(t)\| = \|A\|\|x^*(t)\| + \|b(t)\|$, получаем

$$\|\dot{y}(t)\| = \|A\|\|y(t)\| \, .$$

То есть $\|y(t)\|$ есть решение однородной системы.

Теорема доказана.

Достаточно часто поиск частного решения неоднородной системы удается упростить путем его разделения на более простые (с вычислительной точки зрения) процедуры. Основой такого разделения может служить

Теорема 3.3.2 **Пусть $\|x_{(1)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(1)}(t)\|$, а $\|x_{(2)}(t)\|$ – решение системы (3.3.1) с неоднородностью $\|b_{(2)}(t)\|$, тогда**

$$\|x(t)\| = \|x_{(1)}(t)\| + \|x_{(2)}(t)\|$$

будет решением системы (3.3.1) с неоднородностью

$$\|b(t)\| = \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\|.$$

Доказательство.

Имеем
$$\|\dot{x}_{(1)}(t)\| = \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\|$$
и
$$\|\dot{x}_{(2)}(t)\| = \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| \ .$$

Тогда
$$\|\dot{x}(t)\| = \|\dot{x}_{(1)}(t)\| + \|\dot{x}_{(2)}(t)\| =$$

$$= \|A\|\|x_{(1)}(t)\| + \|A\|\|x_{(2)}(t)\| + \|b_{(1)}(t)\| + \|b_{(2)}(t)\| =$$

$$= \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \ .$$

То есть
$$\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|b(t)\| \ .$$

Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3.3.1, для решения неоднородной системы (3.3.1) необходимо (помимо решения соответствующей однородной системы) найти некоторое частное решение неоднородной.

Как и в случае линейного неоднородного уравнения n-го порядка, это частное решение неоднородной системы может быть найдено в квадратурах при помощи формулы общего решения однородной методом *вариации постоянных*, что доказывает

Теорема 3.3.3 **Решением системы (3.3.1) является вектор-функция**

$$\|x^*(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\|g_{(k)}(t)\| , \qquad (3.3.2)$$

где $\{ \|g_{(1)}(t)\|, \|g_{(2)}(t)\|, \ldots, \|g_{(n)}(t)\| \}$ **некоторый базис в линейном n-мерном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), а функции** $C_k(t)$ **находятся из матричного уравнения**

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| .$$

Доказательство.

Подставив (3.3.2) в (3.3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| + \sum_{k=1}^{n} C_k \|\dot{g}_{(k)}\| = \|A\| \sum_{k=1}^{n} C_k \|g_{(k)}\| + \|b(t)\| \,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k \|g_{(k)}\| = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(-\|\dot{g}_{(k)}\| + \|A\| \|g_{(k)}\| \right) + \|b(t)\| \;.$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, равны нулю, поскольку каждый базисный элемент $\|g_{(k)}\|$ есть решение однородной системы (3.1.1.) Поэтому получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) \|g_{(k)}(t)\| = \|b(t)\| \;.$$

Теорема доказана.

В случае, когда неоднородности в системе (3.3.1) выражаются только через суммы и произведения вещественных функций at^k, $e^{\alpha t}, \cos\beta t$ и $\sin\beta t$, ее частное решение может быть найдено без использования интегрирования – *методом неопределенных коэффициентов.* Действительно, при $\gamma = \alpha + i\beta$ оказывается справедливой

`Теорема 3.3.4` **Пусть система уравнений (3.3.1) такова, что $\|\dot{x}(t)\| = \|A\|\|x(t)\| + \|p(t)\|e^{\mu t}$, где**

$$\|p(t)\| = \|a_{(m)}\|\, t^m + \|a_{(m-1)}\|\, t^{m-1} + \ldots + \|a_{(1)}\|\, t + \|a_{(0)}\| \,.$$

Тогда частное решение системы (3.3.1) имеет вид $\|\, q(t)\|e^{\mu t}$, где $\|q(t)\|$ – вектор-многочлен

- **той же самой степени что и $\|\, p(t)\,\|$, если μ не является корнем характеристического уравнения;**
- **или степени не выше, чем $m + l$, если μ является корнем характеристического уравнения, а l – размер максимальной из жордановых клеток, отвечающих этому корню в жордановой форме матрицы $\|A\|$.**

Описанный метод проиллюстрируем примером.

`Задача 3.3.1` Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} \dot{x} & = & 3x & - & y & + & e^t + e^{2t} - 2t^2 \,, \\ \dot{y} & = & 2x & & & + & 3e^t + 2e^{2t} - t^2 \,. \end{array}\right.$$

`Решение.` 1°. Представим для удобства решаемую систему в матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^{2t} + \left\| \begin{array}{r} -2t^2 \\ -t^2 \end{array} \right\| ,$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \| A \| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\| b_{(1)} \right\| e^t + \left\| b_{(2)} \right\| e^{2t} + \left\| b_{(3)} \right\| t^2 \,,$$

введя (полезные для дальнейших расчетов) обозначения

$$\| A \| = \left\| \begin{array}{cr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| , \quad \left\| b_{(1)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right\| ,$$

$$\left\| b_{(2)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| , \qquad \left\| b_{(3)} \right\| = \left\| \begin{array}{r} -2 \\ -1 \end{array} \right\| ,$$

2°. Теперь найдем (имея в виду применение теоремы 3.3.1) по стандартной схеме, описанной в § 3.1, общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cr} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| .$$

Находим собственные значения линейного преобразования с матрицей $\|A\|$

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{array} \right\| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 1\,, \\ \lambda_2 & = & 2\,. \end{array}$$

и соответствующие собственные векторы

$$\left\| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(1)} \\ \xi_{2(1)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| .$$

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Longrightarrow \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_{1(2)} \\ \xi_{2(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

Тогда, согласно теореме 3.1.3, получаем общее решение однородной системы

$$\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\| e^t + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{2t} .$$

3°. Используя теорему 3.3.2, найдем теперь частные решения исходной неоднородной системы отдельно для каждой из неоднородностей, содержащих соответственно $\left\|b_{(1)}\right\|$, $\left\|b_{(2)}\right\|$ и $\left\|b_{(3)}\right\|$.

Рассмотрим подробно случай неоднородности $\left\|b_{(1)}\right\| e^t$, которая является векторным квазимногочленом с $\mu = \lambda_1 = 1$, причем $m = 0$, а $l = 1$, поскольку μ совпадает с однократным корнем характеристического многочлена. Значит частное решение следует искать в виде

$$\left\|r^*_{(1)}\right\| = \Big(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\Big)e^t.$$

где первый нижний индекс у $\left\|a_{(ij)}\right\|$ равен показателю степени t, а второй – номеру частного решения.

Его подстановка в неоднородную систему

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array} \right\| = \|A\| \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| + \left\|b_{(1)}\right\| e^t$$

дает

$$\left(\left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\right)e^t =$$

$$= \|A\| \left(\left\|a_{(01)}\right\| + t\left\|a_{(11)}\right\|\right)e^t + \left\|b_{(1)}\right\| e^t .$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим, что

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|A\| \left\|a_{(11)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| , \\ \|A\| \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|b_{(1)}\right\| & = & \left\|a_{(01)}\right\| + \left\|a_{(11)}\right\| \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\|A\| - \|E\|\right)\left\|a_{(11)}\right\| & = & \|o\| , \\ \left(\|A\| - \|E\|\right)\left\|a_{(01)}\right\| & = & \left\|a_{(11)}\right\| - \left\|b_{(1)}\right\| . \end{array} \right. \qquad (3.3.3)$$

Заметим, что основные матрицы в обоих уравнениях системы (3.3.3) вырождены. Это есть следствие равенства $\mu = \lambda_1 = 1$, то есть, резонанса.

При этом первое уравнение (как однородное) совместно и имеет неединственное решение вида $\left\| a_{(11)} \right\| = \alpha \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\|$.

Второе же уравнение неоднородное, оно будет иметь решения, вообще говоря, не при любом $\left\| a_{(11)} \right\|$. Его можно сделать совместным, подобрав подходящее значение α.

Действительно, расширенная матрица второго уравнения системы (3.3.3) будет иметь ранг, равный рангу основной матрицы (что по теореме Кронекера–Капелли гарантирует совместность), если выполнены равенства

$$\mathrm{rg}\left\| \begin{array}{rr|c} 2 & -1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 2\alpha-3 \end{array} \right\| = \mathrm{rg}\left\| \begin{array}{rr|c} 2 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{array} \right\| = 1\,.$$

Это дает $\alpha = 2$ и $\left\| a_{(11)} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\|$. Вектор $\left\| a_{(01)} \right\|$ здесь неоднозначен, его можно взять равным $\left\| a_{(01)} \right\| = \left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\|$ и тогда $\left\| r^*_{(1)} \right\| = \left(\left\| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array} \right\| + t \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \right) e^t\,.$

Случаи неоднородностей $\left\|b_{(2)}\right\|$ и $\left\|b_{(3)}\right\|$ рассматриваются аналогично первому.

Второй случай также резонансный, причем частным решением оказывается квазимногочлен нулевой степени (теорема 3.3.4 это допускает) вида $\left\|r^*_{(2)}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right\| e^{2t}$.

В третьем случае резонанса нет, а частное решение имеет вид

Решение получено.

$$\left\|r^*_{(3)}\right\| = -\frac{1}{4}\left\|\begin{array}{r} 5 \\ 13 \end{array}\right\| - \frac{t}{2}\left\|\begin{array}{r} 1 \\ 5 \end{array}\right\| + \frac{t^2}{2}\left\|\begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array}\right\| .$$

Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 3.4.1	Степенью k, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k}\ .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det\|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$ и при $k \geq 2$. $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим, выполняемые поэлементно, операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

Определение 3.4.2	Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t) \ \ \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t \in T$. Тогда элементами матрицы – $\lim\limits_{t\to t_0} \|A(t)\|$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha_{ij}(t)$; – $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\,\alpha_{ij}(t)$; – $\int\limits_{t_0}^{t} \|A(u)\|\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t} \alpha_{ij}(u)\,du$.

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

`Определение 3.4.3`	Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$, если $\forall i,j = [1,n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$, составленный из ij-х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$, сходится к $ij-$му элементу $\|B\|$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные, доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение 3.4.4	*Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle\|A\|\rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \lvert\alpha_{ij}\rvert$.

Теорема 3.4.1

Если $\Big\langle\|A_{(k)}(t)\|\Big\rangle \leq a_k \;\; \forall k = 0,1,2,\ldots, \forall t \in T$ **и мажорирующий числовой ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится абсолютно и равномерно на** T.

Доказательство.

Следует из определений 3.4.3 и 3.4.4, а также соответствующих свойств функциональных рядов.

Теорема доказана.

`Теорема 3.4.2` **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots \quad (3.4.1)$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \leq \rho$ комплексной плоскости.

Доказательство.

Согласно определению 3.4.4, для любой квадратной матрицы $\|A\|$ существует неотрицательное число $M = \langle \|A\| \rangle$, для которого $|\alpha_{ij}| \le M \ \forall i,j = [1,n]$. Оценим, исходя из правила умножения матриц, норму матрицы $\|A\|^2$. Обозначим элемент $\|A\|^k$ как $\alpha_{ij(k)}$. Поскольку

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \text{ то } \alpha_{ij(2)} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\alpha_{sj}$$

и

$$\left|\alpha_{ij(2)}\right| \ \le \ \sum_{s=1}^{n} |\alpha_{is}||\alpha_{sj}| \ \le \ nM^2 \ .$$

Действуя аналогично для бо́льших степеней матрицы $\|A\|$, по индукции получаем $\left|\alpha_{ij(k)}\right| \le n^{k-1}M^k$.

В силу определения 3.4.3 сходимость матричного ряда (3.4.1) равносильна сходимости числовых рядов

$$\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \alpha_{ij(k)}}{k!} = \delta_{ij} + \frac{t\alpha_{ij(1)}}{1!} + \frac{t^2\alpha_{ij(2)}}{2!} + \frac{t^3\alpha_{ij(3)}}{3!} + \dots \qquad (3.4.2)$$

для всех $i, j = [1, n]$. В этой формуле слагаемое δ_{ij} есть символ Кронекера.

Сходимость каждого из рядов (3.4.2) следует из сходимости мажорирующего числового ряда

$$1 + \frac{\rho M}{1!} + \frac{\rho^2 n M^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^k n^{k-1} M^k}{k!} + \dots \ ,$$

который сходится по признаку д'Аламбера (проверьте это самостоятельно!).

Наконец, используя утверждение теоремы 3.4.1, приходим к доказываемому результату.

Теорема доказана.

Определение 3.4.5	*Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$

Согласно этому определению и правилу умножения числа на матрицу, сумма матричного ряда (3.4.1) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} \ . \qquad (3.4.3)$$