

Исследование зависимости решения задачи Коши от параметров

В реальных приложениях постановка задачи Коши может зависеть от некоторых параметров, значения которых а priori известны, но с некоторой, вообще говоря, ненулевой погрешностью. В этом случае важно убедиться в том, что малые вариации значений параметров приводят к малым вариациям решения. Данное свойство принято называть *корректностью* постановки задачи Коши. Найдем условия, гарантирующие наличие данного свойства.

Имеет место

Теорема 4.5.1 Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывно дифференцируема в G по всем своим переменным до порядка $N \geq 1$. Тогда любое решение системы дифференциальных уравнений вида $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ имеет непрерывные производные порядка $N + 1$.

Доказательство.

При $N = 1$ теорема верна в силу теоремы Коши. Применим к рассматриваемой системе теорему о дифференцируемости сложной функции. Получим

$$\vec{y}'' = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx}.$$

То есть существует непрерывная вторая производная от \vec{y} .

Пусть теперь $N = 2$. Снова применив к последнему равенству теорему о дифференцируемости сложной функции, придем к заключению о существовании непрерывной производной третьего порядка и т.д.

Теорема доказана.

Таким образом, чем выше степень гладкости правых частей исходной системы, тем выше степень гладкости ее решений.

Также будет справедлива

Теорема
4.5.2
(о не-
прерыв-
ности)

Пусть p – скалярный параметр. Тогда, если функции $\vec{f}(x, \vec{y}, p)$ и $\frac{\partial \vec{f}(x, \vec{y}, p)}{\partial y_i} \quad \forall i = [1, n]$ непрерывны в области G по совокупности всех своих аргументов, то $\vec{y}^*(x, p)$ – решение задачи Коши:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}, p), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

при $\|x_0 \vec{y}_0 p_0\|^T \in G$ – непрерывно по совокупности переменных $\{x, p\}$ в некотором прямоугольнике

$$\Pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq \delta_r, \\ |p - p_0| \leq \delta_p. \end{array} \right\}$$

Доказательство.

Рассматриваемую задачу Коши можно записать в следующем, операторном виде

$$\vec{y} = \widehat{\Phi}\vec{y}, \quad \text{где} \quad \widehat{\Phi}\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(u, \vec{y}, p) du .$$

Согласно теоремам 4.2.1 (*принцип сжимающих операторов*) и 4.3.1 (*Коши*) это уравнение имеет в некоторой замкнутой, ограниченной окрестности \vec{y}_0 в банаховом пространстве непрерывно дифференцируемых функций единственное решение.

Покажем теперь, что в силу сжимаемости оператора $\widehat{\Phi}$, решение задачи Коши является непрерывной функцией p . Выберем $r > 0$ и δ_r так, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.3.1. В этом случае коэффициент сжатия оператора $\widehat{\Phi}$ будет равен q_r . По следствию 4.3.1 из условия теоремы вытекает, что $\exists L > 0$ такое, что $q_r = \delta_r L$.

Из теоремы 4.2.1 следует, что рекуррентно определенная вектор-функциональная последовательность с непрерывными членами

$$\vec{y}_{(k)}(x, p) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}\left(u, \vec{y}_{(k-1)}(u, p), p\right) du ,$$

$$\vec{y}_{(0)}(x, p) = \vec{y}_0, \quad \left\| \begin{matrix} x \\ p \end{matrix} \right\| \in \Pi,$$

сходится к $\vec{y}^*(x, p)$, причем (как следует из теоремы 4.2.1)

$$\langle \vec{y}_{(k)}(x, p) - \vec{y}^*(x, p) \rangle \leq (q_r)^k r, \quad \text{где } q_r = \delta_r L < 1.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса имеет место равномерная по p сходимость:

$$\vec{y}_{(k)}(x, p) \Rightarrow \vec{y}^*(x, p), \quad \left\| \begin{matrix} x \\ p \end{matrix} \right\| \in \Pi,$$

и из непрерывности по p вектор-функций $\vec{y}_{(k)}(x, p) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$ следует непрерывность $\vec{y}^*(x, p)$.

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает условия дифференцируемости решения задачи Коши.

Теорема
4.5.3
(о дифференцируемости)

Пусть в области G пространства $\{x, \vec{y}, p\}$ вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y}, p)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка $N \geq 1$ включительно.

Тогда решение задачи Коши $\vec{y}^*(x, p)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка N . При этом частная производная $\frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p}$ является решением задачи Коши для уравнения в вариациях по параметру p

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k^*}{\partial p} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial p}$$

с начальным условием $\left. \frac{\partial \vec{y}^*}{\partial p} \right|_{x=x_0} = \vec{\sigma}$.

Наконец, также будет верной

Теорема 4.5.4 Если вектор-функция \vec{f} имеет в области G непрерывные частные производные по всем своим аргументам, то решение задачи Коши $\vec{y}^*(x, x_0, \vec{y}_0)$ (как функция начальных условий) будет непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности x_0 по аргументам x, x_0, \vec{y}_0 .

Доказательство.

Сделаем замену переменных: $u = x - x_0$, $\vec{z} = \vec{y} - \vec{y}_0$. Тогда исходная задача Коши

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (4.5.4)$$

примет вид $\vec{z}' = \vec{f}(u + x_0, \vec{z} + \vec{y}_0)$, $\vec{z}(0) = \vec{o}$
или

$$\vec{z}' = \vec{g}(u, \vec{z}, x_0, \vec{y}_0), \quad \vec{z}(0) = \vec{o}. \quad (4.5.5)$$

Таким образом, в формулировке задачи (4.5.5) исходные начальные данные x_0, \vec{y}_0 превратились в параметры правой части дифференциального уравнения, а новые начальные условия стали независимыми от параметров.

В силу условий доказываемой теоремы, для задачи (4.5.5) оказываются справедливыми утверждения теорем 4.5.2 и 4.5.3 о непрерывной зависимости и дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. А из равносильности задач (4.5.5) и (4.5.4) следует, что эти условия будут справедливы и для исходной задачи (4.5.4).

Теорема доказана.

Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

Ранее нами были обсуждены методы нахождения общего решения уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, то есть уравнений вида

$$F(x, y, y') = 0 . \quad (4.6.1)$$

Как и раньше, мы будем предполагать, что скалярные функции $F(x, y, d)$ и $\frac{\partial F}{\partial d}$ вещественны и непрерывны в некоторой непустой области $G \subseteq E^3$.

Задачей Коши для уравнения (4.6.1), согласно определению 1.5.2, называется задача поиска $y^*(x)$ – частного решения уравнения (4.6.1), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} y^*(x_0) &= y_0 , \\ y^{*\prime}(x_0) &= d_0 , \\ \text{где } F(x_0, y_0, d_0) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2) дает

Теорема 4.6.1 Пусть функции $F(x, y, d)$ и $\frac{\partial F}{\partial d}$ непрерывны в области G и пусть $\frac{\partial F}{\partial d} \Big|_{(x_0, y_0, d_0)} \neq 0$, тогда найдется $\delta > 0$ такое, что решение задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2) существует и единственно на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Доказательство.

Согласно известной из курса математического анализа *теореме о неявной функции* уравнение $F(x, y, d) = 0$ разрешимо относительно d в форме единственной и непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $\|x_0, y_0\|^T$ функции $d = f(x, y)$.

Это означает, что задача Коши (4.6.1)–(4.6.2) равносильна задаче Коши вида

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y), \\ \text{где } y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

существование и единственность решения которой были доказаны в теореме 4.3.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 4.6.1 не выполняются.

Определение
4.6.1

Точка $\|x_0 y_0\|^T$ называется *неособой*, если существует ее окрестность такая, что через эту точку в данной окрестности проходит интегральная кривая задачи (4.6.3) и притом только одна.

Иначе точка $\|x_0 y_0\|^T$ называется *особой*.

Решение задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2), все точки которого особые, называется *особым решением*.

Геометрически данное определение может быть интерпретировано так: в каждой точке интегральной кривой особого решения ее касается интегральная кривая другого решения уравнения (4.6.1), то есть решения несовпадающего с особым в некоторой окрестности точки касания.

Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 4.6.1, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d}(x, y, d) = 0. \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Если из этой системы исключить d , то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x, y) = 0$.

Определение
4.6.2

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x, y) = 0$, называется *дискриминантной кривой* или, точнее, *дискриминантным множеством* уравнения (4.6.1).

Из сказанного следует, что интегральная кривая особого решения обязана принадлежать дискриминантному множеству. Обратное, вообще говоря, не верно, но тем не менее искать особые решения следует среди дискриминантных кривых. Проиллюстрируем этот факт следующими задачами.

Задача 4.6.1a Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнения $y'^2 = y$.

Решение. Решив систему (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - y = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$ получим дискриминантную кривую вида $y = 0$. Это – очевидно решение.

При этом исходное уравнение также имеет решения вида $y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$. Нетрудно убедиться, что $y = 0$ – особое решение.

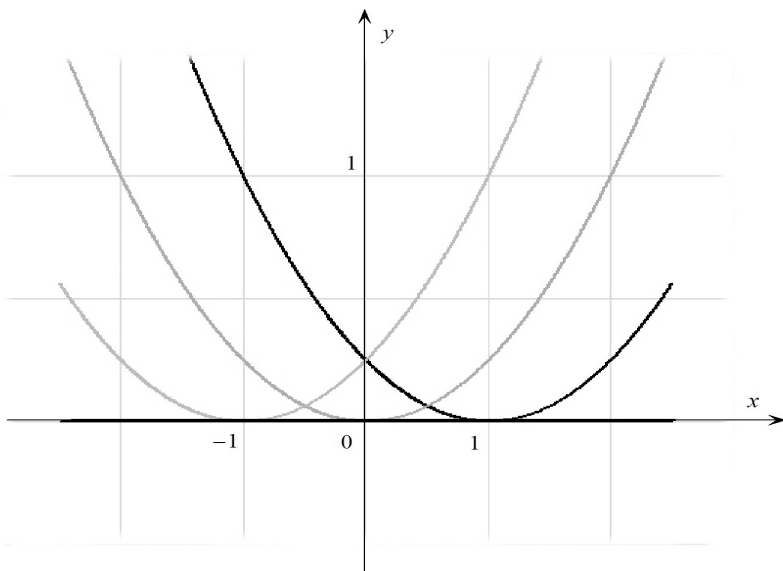


Рис. 1. Интегральные кривые задачи 4.6.1a

Задача
4.6.1b

Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнения $y'^2 = x$.

Решение.

Из системы (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - x = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$ находим, что дискриминантная кривая есть $x = 0$. Данное уравнение имеет решения $y = \pm \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, однако дискриминантная кривая $x = 0$ — не решение уравнения, а геометрическое место точек возврата его интегральных кривых.

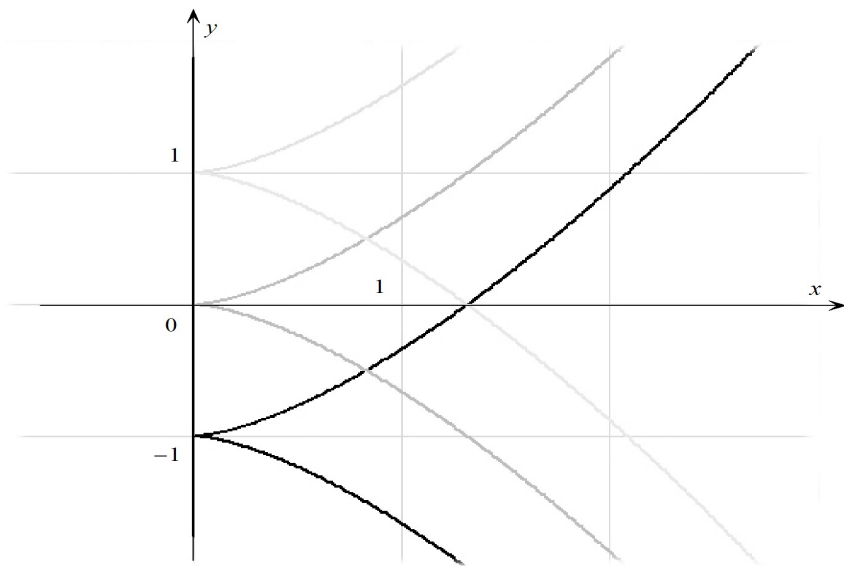


Рис. 2. Интегральные кривые задачи 4.6.1b

Задача 4.6.1с Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнения $y'^2 - 4y^3(1 - y) = 0$.

Решение. Система (4.6.4) в этом случае такова

$$\begin{cases} d^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \\ 2d = 0. \end{cases}$$

Значит, дискриминантная кривая задается уравнением $y^3(1 - y) = 0$ и состоит из двух ветвей: $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что обе они являются решениями. Проверьте самостоятельно, что исходное уравнение также имеет решения

$$y = \frac{1}{1 + (x - C)^2}.$$

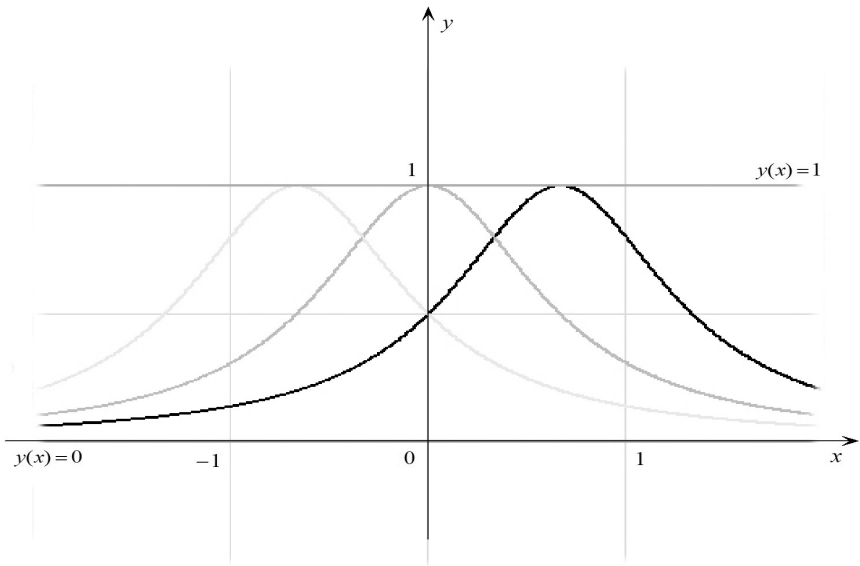


Рис. 3. Интегральные кривые задачи 4.6.1с

Заметим, что при этом на $y = 1$ единственность нарушается, а на $y = 0$ – нет. Значит, $y = 0$ – неособое решение. Наконец, поскольку $y = 1$ есть касательная к нелинейным интегральным кривым, делаем заключение, что $y = 1$ – особое решение.

В общем случае, для выделения особого решения уравнения (4.6.1) следует:

- 1°. Найти общее решение уравнения (4.6.1).
- 2°. Найти дискриминантные кривые уравнения (4.6.1), которые являются частными решениями этого уравнения.
- 3°. Проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (4.6.1).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п. 3° следующая. Пусть $y(x, C) \forall x \in [a, b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (4.6.1), а $y^+(x)$ – частное решение этого уравнение, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^+(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a, b]$ у *переопределенной* системы

$$\begin{cases} y(x, C) &= y^+(x), \\ \frac{\partial y(x, C)}{\partial x} &= \frac{d y^+(x)}{d x} \end{cases} \quad (4.6.5)$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.

Проиллюстрируем применение описанной схемы для конкретной задачи. Мы воспользуемся (в упрощенном варианте) ранее полученным решением задачи.

Задача 4.6.2 Найти особые решения уравнения

$$xy' - y = \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2}.$$

Решение. 1°. Общее решение данного уравнения найдем методом введения параметра (см § 1.5, задача 1.5.1).

$$\left[\begin{array}{l} y(x, C) = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} \quad \forall C > 0, \\ y(x) = e^{2x-1}. \end{array} \right.$$

2°. Составим систему (4.6.4) для определения вида линии $D(x, y) = 0$ – дискриминантной кривой.

$$\begin{cases} xd - y - \frac{d}{2} \ln \frac{d}{2} = 0, \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Ее решением будет функция $y = e^{2x-1}$, которая, очевидно, есть частное решение исходного уравнения. Таким образом,

$$\begin{aligned} y(x, C) &= Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}, \\ y^+(x) &= e^{2x-1}. \end{aligned}$$

3°. Наконец, для проверки выполнения определения особого решения, составим систему (4.6.5).

$$\begin{cases} Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} = e^{2x-1}, \\ C = 2e^{2x-1}. \end{cases}$$

Она совместна $\forall C > 0$, причем ее решение есть функция $(x) = 2e^{2x-1}$. Это и означает, что $y^+(x) = e^{2x-1}$ особое решение исходного уравнения. Вид соответствующих интегральных кривых показан на следующем рисунке.

Решение
получено.

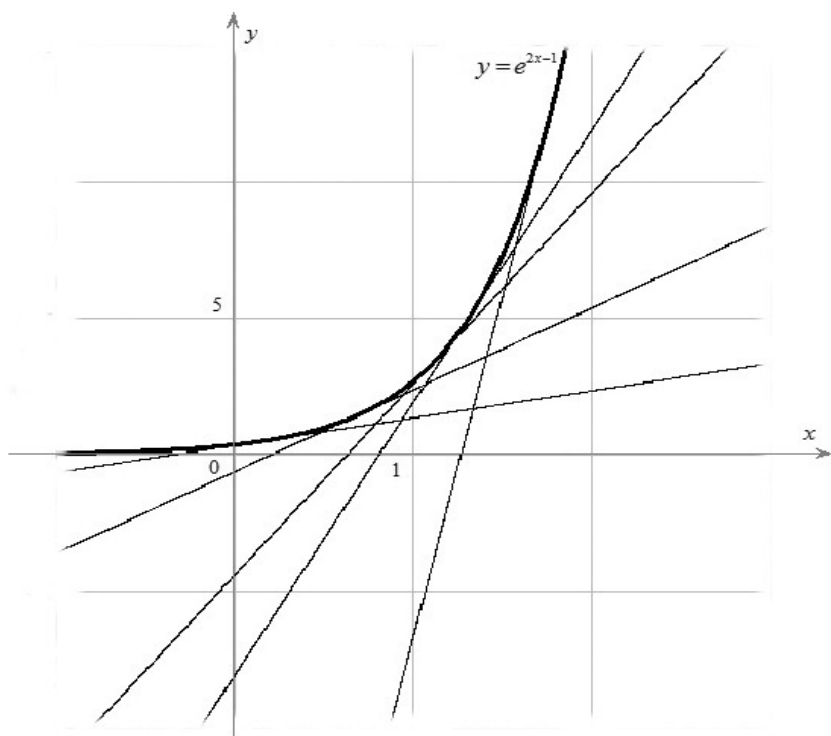


Рис. 4. Интегральные кривые задачи 4.6.2

Существование и единственность решения задачи Коши в линейном и квазилинейном случаях

Пусть матрица $\|A(x)\|$ и вектор-функция $\|b(x)\|$ непрерывны для любого $x \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим следующую задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\|\vec{y}'\| = \|A(x)\| \|\vec{y}\| + \|b(x)\|, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \quad (4.7.1)$$

а также, тесно с ней связанную, задачу Коши вида

$$\|\vec{y}'\| = \|\vec{f}(x, \vec{y})\|, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (4.7.2)$$

для *квазилинейного* случая, когда правая часть в (4.7.2) определена $\forall x \in R$ и может расти при $\langle \vec{y} \rangle \rightarrow +\infty$ не быстрее линейной функции.

Последнее условие формально означает, что $\lim_{\langle \vec{y} \rangle \rightarrow +\infty} \frac{\langle \vec{f}(x, \vec{y}) \rangle}{\langle \vec{y} \rangle} = 0$.

Например, $\langle \vec{f} \rangle \sim \sqrt[k]{\langle \vec{y} \rangle}$, $k > 1$ или $\langle \vec{f} \rangle \sim \ln \langle \vec{y} \rangle$.

Рассмотрим вначале задачу (4.7.2). Имеет место

Теорема 4.7.1 Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в непустой области $G \subseteq E^{n+1} : \{x \in (\alpha, \beta), \vec{y} \in E^n\}$, а также квазилинейна в G .

И пусть $\vec{f}(x, \vec{y})$ в любой замкнутой области

$$\overline{Q} : \{x \in [\alpha_0, \beta_0] \subset (\alpha, \beta), \vec{y} \in E^n\}$$

удовлетворяет неравенству $\langle \vec{f}(x, \vec{y}) \rangle \leq M$ и условию Липшица с константой Липшица равной L .

Тогда $\forall \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{array} \right\| \in G$ на всем интервале (α, β) задача Коши (4.7.2) имеет единственное решение.

Следствие 4.7.1 Пусть матрица $\|A(x)\|$ и вектор-функция $\|b(x)\|$ непрерывны $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Тогда $\forall \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ \vec{y}_0 \end{array} \right\| \in G$ на всем интервале (α, β) задача Коши (4.7.1) имеет решение и притом единственное.

Здесь следует отметить, что в отличие от теоремы 4.3.1 (Коши), устанавливающей существование и единственность решения задачи Коши лишь локально, теорема 4.7.1 имеет глобальный характер. Кроме того, итерационная процедура

$$\vec{y}_{(k)}(x) = \widehat{\Phi} \vec{y}_{(k-1)}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

для квазилинейных и линейных задач сходится из любой начальной точки множества G , в то время как в общем случае, сходимость гарантируется лишь для начальных приближений, достаточно близких к точному решению задачи Коши.

Поясним это утверждение следующим примером: рассмотрим задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$ для систем:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{y}{x-1} + \sin x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{y}{x-1} + \sin y. \end{cases}$$

Решение задачи Коши для первой (линейной) системы существует и единственно (причем оно непродолжимое!) на всем интервале $x \in (-\infty, 1)$, в то время как для второй (нелинейной) системы можно утверждать, что решение задачи Коши существует и единственно лишь на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, 1)$, содержащем точку $x = 0$.