

## Положения равновесия автономных систем второго порядка

Как уже было отмечено, теорема 6.1.5 (о выпрямлении траекторий) не применима в окрестностях положений равновесия. Исследование поведения фазовых траекторий в этих областях требует использования более сложных, специальных методов, рассмотрению которых посвящен данный параграф.

Основой такого метода, например, может послужить локальная линеаризация системы (6.1.1) в малой окрестности положения равновесия, а также набор условий, гарантирующий подобие поведения (или, как принято говорить, *эквивалентность*) в этой окрестности фазовых траекторий исходной и линеаризованных систем.

Рассмотрим в качестве примера вещественную нелинейную автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (6.3.1)$$

где  $F_1(x_1, x_2)$  и  $F_2(x_1, x_2)$  – заданные вещественные, непрерывно дифференцируемые в области  $\Omega \subseteq E^2$  функции.

Найдем фазовый портрет для этой системы в окрестности некоторой точки  $\|x_{01} \ x_{02}\|^T \in \Omega$ .

Без потери общности можно считать, что  $\|x_{01} \ x_{02}\|^T = \|0 \ 0\|^T$ , поскольку начало координат фазовой плоскости переносится в рассматриваемую точку линейной невырожденной заменой

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{01}, \\ y_2 = x_2 - x_{02}. \end{cases}$$

Если начало координат не есть особая точка, то фазовый портрет можно получить, применяя теорему 6.1.5 (о выпрямлении траекторий), из которой следует, что фазовые траектории в малой окрестности начала координат суть почти прямые, непересекающиеся линии.

Допустим теперь, что начало координат является положением равновесия системы (6.3.1). Тогда из равенств  $F_1(0, 0) = 0$  и  $F_2(0, 0) = 0$  и формулы Тейлора следуют соотношения

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ F_2(x_1, x_2) = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \end{cases}$$

где

$$\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{x_1 = 0, \\ x_2 = 0}} \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда система (6.3.1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \end{cases}$$

и естественно дать

<p><b>Определение</b> 6.3.1</p>	<p>Линейная однородная система</p> $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \quad (6.3.2)$ <p>называется <i>линеаризацией</i> системы (6.3.1) в начале координат.</p>
-------------------------------------	---

Как и раньше, будем использовать обозначение

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|.$$

Основой для исследования поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (6.3.1) служит

**Теорема 6.3.1** (0 линейаризации) **Если для линейного преобразования, задаваемого матрицей  $\|A\|$ , все собственные значения различны и имеют ненулевые вещественные части, то особая точка в начале координат системы (6.3.1) имеет тот же вид фазового портрета, что и ее линейаризация (6.3.2). При этом в малой окрестности особой точки сохраняются такие особенности фазовых траекторий, как направление закручивания и устойчивость.**

В силу вышеизложенного представляется целесообразным вначале изучение характера поведения фазовых траекторий *линейных* автономных систем, которое мы выполним для случая  $n = 2$ , то есть для случая, когда фазовое пространство есть двумерная плоскость.

Рассмотрим линейную, с произвольными вещественными коэффициентами, автономную систему уравнений вида

$$\|\dot{X}\| = \|A\| \|X\| \quad (6.3.3)$$

или же в развернутой матричной форме

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix},$$

где

$$\|\dot{X}\| = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix}, \quad \|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \|X\| = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Для исследования характера поведения фазовых траекторий системы (6.3.3) удобно найти аналитическое представление ее общего решения, что (как было показано в § 3.1–3.2) требует нахождения собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей  $\|A\|$ , обозначаемых далее как  $\|h_{(1)}\|$  и  $\|h_{(2)}\|$ .

Рассмотрим последовательно следующие четыре случая.

**1°. Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественные, различные и отличные от нуля**

В этом случае в  $E^2$  существует базис из собственных векторов  $\|h_{(1)}\|$  и  $\|h_{(2)}\|$ , в котором система (6.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и соответственно решения  $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$  и  $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением  $t$  и имеют вид

$$y_2 = C_2 \left( \frac{y_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \text{при } C_1 \neq 0, \tag{6.3.4}$$
$$y_1 = 0, \quad \text{при } C_1 = 0.$$



Из формул (6.3.4) следует, что если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одного знака, то фазовые траектории являются дугами парабол, касающихся в начале координат оси  $Oy_1$  при  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . При  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  траектории в начале координат касаются оси  $Oy_2$ .

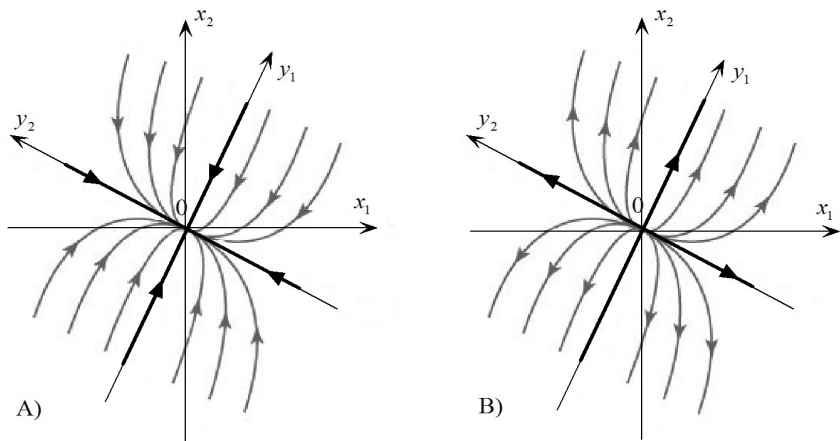


Рис. 1. Положение равновесия *узел*

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, то движение с ростом  $t$  по фазовым траекториям происходит по направлению к началу координат, и положение равновесия называется *асимптотически устойчивым узлом*.

В случае, когда  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  положительны, движение происходит от начала координат (*неустойчивый узел*). Следует отметить, что координатные полуоси, равно как и само начало координат, также являются фазовыми траекториями.

Наконец, следует выполнить обратный переход к исходным переменным  $x_1$  и  $x_2$ , который является линейным невырожденным (аффинным) преобразованием в  $E^2$ . Само преобразование при построении фазового портрета находить необязательно. Достаточно воспользоваться тем его свойством, что собственные векторы матрицы  $\|A\|$  являются направляющими векторами прямолинейных фазовых траекторий

Итоговый вид фазовых портретов для положения равновесия типа *устойчивый узел* показан на рис. 6.3А, а для положения равновесия типа *неустойчивый узел* – на рис. 6.3В.

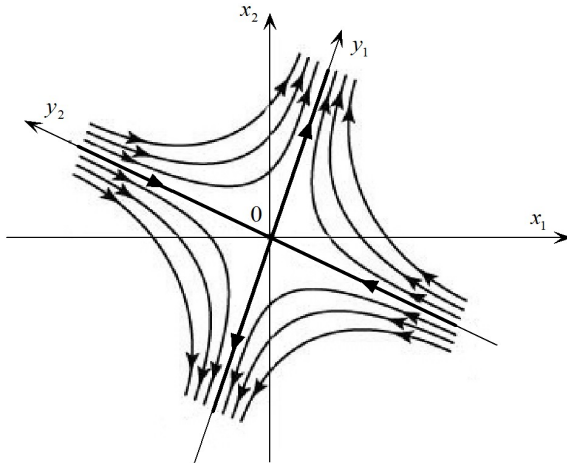


Рис. 2. Положение равновесия *седло* с  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков, то положение равновесия называется *седлом*. Оно всегда неустойчиво, поскольку одно из собственных значений матрицы  $\|A\|$  положительно.

В базисе из собственных векторов фазовые траектории седла (отличные от координатных полуосей и начала координат) по свойствам аналогичны ветвям гипербол. Действительно, из (6.3.4) имеем:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} |y_2| = +\infty, \quad \lim_{|y_1| \rightarrow +\infty} y_2 = 0.$$

Движение по траекториям, являющимся координатными полуосями, направлено от начала координат для оси, которой соответствует  $\lambda > 0$ , и направлено к началу координат, если  $\lambda < 0$ . По остальным фазовым траекториям направление движения в каждой четверти координатной плоскости определяется направлением движения по смежным координатным полуосям (см. рис. 6.4).

Переход к исходным переменным выполняется также как и в случае узла.

**2°. Собственные значения вещественные, равные и отличные от нуля**

Пусть  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ . Матрица системы (6.3.3) в жордановом базисе может оказаться диагональной, а может и нет.

В первом случае решение будет  $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$  и  $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$ . Значит, фазовые траектории суть полупрямые, исходящие из начала координат при  $\lambda > 0$  или входящие в него при  $\lambda < 0$ , последний случай показан на рис. 6.5А. Такое положение равновесия называется соответственно *неустойчивым* или *асимптотически устойчивым дикритическим узлом*.

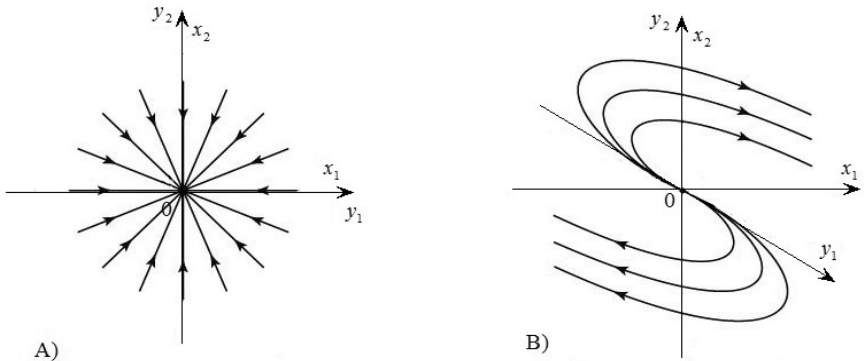


Рис. 3. Положения равновесия *дикритический узел* и *вырожденный узел*

Во втором случае система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2. \end{cases}$$

Ее общее решение  $y_1(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$  и  $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением  $t$  и имеют вид (см. рис. 6.5В)

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + \frac{y_2}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2}, \quad \text{при } C_2 \neq 0,$$

$$y_2 = 0, \quad \text{при } C_2 = 0.$$

Данная особая точка называется *вырожденным узлом – неустойчивым*, если  $\lambda > 0$ , и *устойчивым*, если  $\lambda < 0$ .

Переход к исходным переменным выполняется так же, как и в предыдущих случаях.

**3°. Собственные значения невещественные и неравные друг другу.**

В этом случае из вещественности коэффициентов матрицы  $\|A\|$  следует, что  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  и  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  при условии  $\beta \neq 0$ . Собственные векторы  $\|h_{(1)}\|$  и  $\|h_{(2)}\|$ , отвечающие  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , комплексно сопряженные и линейно независимые элементы в унитарном пространстве  $U^2$ , поэтому

$$\|h_{(1)}\| = \|p\| + i\|q\| \quad \text{и} \quad \|h_{(2)}\| = \|p\| - i\|q\|,$$

где  $\|p\|$  и  $\|q\|$  вещественные и линейно независимые элементы пространства  $E^2$ .

Комплекснозначная вектор-функция

$$\|x(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t} \|h_{(1)}\| = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} (\|p\| + i\|q\|)$$

по теореме 3.1.2 является решением системы (6.3.3) при любой комплексной константе  $C_1$ . Кроме того, согласно лемме 2.4.2, решением системы (6.3.3) будет и вещественная вектор-функция  $\operatorname{Re} \|x(t)\|$ .

Найдем ее вид, представив предварительно константу  $C_1$  в экспоненциальной форме  $C_1 = \rho e^{i\theta}$ , где  $\rho \geq 0$ ,  $\theta$  – произвольные вещественные постоянные. Из

$$\|x(t)\| = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)} (\|p\| + i\|q\|)$$

получаем, что

$$\operatorname{Re} \|x(t)\| = \|p\| \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) - \|q\| \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta).$$

В силу линейной независимости  $\|p\|$  и  $\|q\|$  можно утверждать, что скалярные функции

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta), \\ y_2(t) = \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta) \end{cases} \quad (6.3.5)$$

задают параметрическое представление интегральных кривых системы (6.3.1) в *новом декартовом базисе*  $\{\|p\|; -\|q\|\}$ , а сами являются соответствующими декартовыми координатами.

Определение вида фазовых траекторий удобно выполнить, перейдя от декартовой системы координат к полярной по стандартным формулам

$$\begin{cases} y_1 = r \cos \varphi, \\ y_2 = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (6.3.6)$$

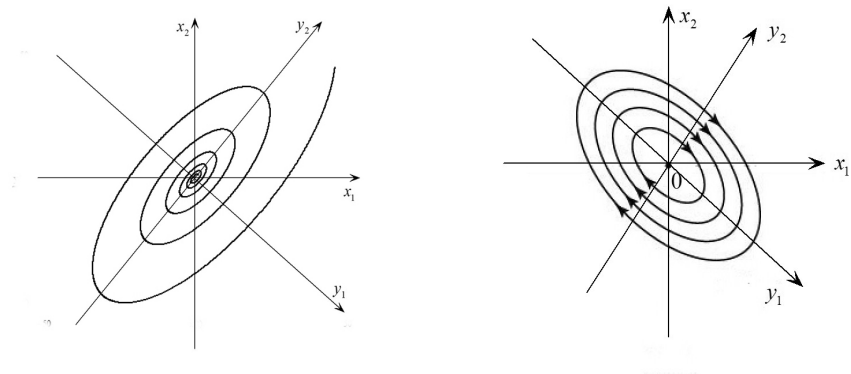


Рис. 4. Положения равновесия *фокус* и *центр*



Сопоставление формул (6.3.5) и (6.3.6) позволяет получить параметрическое представление фазовых траекторий в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = \rho e^{\alpha t}, \\ \varphi = \beta t + \theta, \end{cases} \quad (6.3.7)$$

из которого следует, что фазовые траектории в базисе  $\{ \|p\|; -\|q\| \}$

при  $\alpha > 0$  суть раскручивающиеся от начала координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*);

при  $\alpha < 0$  суть скручивающиеся к началу координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *асимптотически устойчивым фокусом*);

при  $\alpha = 0$  образуют систему концентрических окружностей с центром в начале координат (положение равновесия называется *центром*). Это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Важно отметить: формулы (6.3.7) дают *все* вещественные решения, поскольку для каждой точки  $\{y_1, y_2\}$  существуют значения полярных координат  $\rho$  и  $\theta$  такие, что через эту точку проходит *единственная* фазовая траектория вида (6.3.7).

Переход от базиса  $\{\|p\|; -\|q\|\}$  к исходному выполняется стандартно.

Направление движения по фазовым траекториям (то есть по часовой стрелке или против) можно установить, найдя фазовую скорость для некоторой конкретной точки, не являющейся положением равновесия. Например из (6.3.3) следует, что в точке  $\|1\ 0\|^T$  фазовая скорость равна вектору  $\|\alpha_{11}\ \alpha_{21}\|^T$ .

Кроме того, для уточнения вида фазовой траектории полезной может оказаться информация о точках, в которых касательная к ней либо горизонтальна (то есть,  $\dot{x}_2 = 0$ ), либо вертикальна ( $\dot{x}_1 = 0$ ). Уравнения соответствующих изоклин находятся из системы (6.3.3) и имеют вид

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$$

соответственно.

#### 4°. Определитель матрицы системы (6.3.3) равен нулю

Если  $\det \|A\| = 0$ , то согласно определению 6.3.2 система (6.3.3) называется сложной и в жордановом базисе ее матрица может иметь один из трех следующих видов:

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

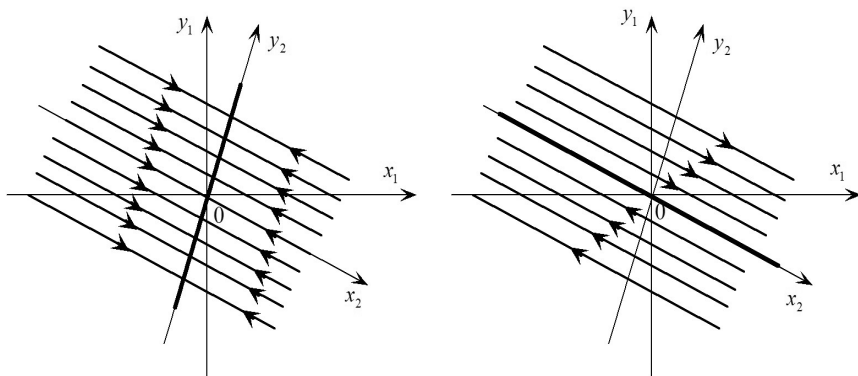


Рис. 5. Положения равновесия для сложной системы

В первом из этих трех случаев  $\lambda_1 = \lambda \neq 0$  и  $\lambda_2 = 0$ , решение в жордановом базисе будет  $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$  и  $y_2(t) = C_2$ . Поэтому все точки прямой  $y_1 = 0$  являются положениями равновесия. При этом обе полупрямые  $y_2 = C_2$  суть фазовые траектории. Движение по ним при  $t \rightarrow +\infty$  идет к прямой  $y_1 = 0$  при  $\lambda < 0$  и от прямой  $y_1 = 0$  при  $\lambda > 0$ .

Во втором случае решение имеет вид  $y_1(t) = C_1 + C_2 t$  и  $y_2(t) = C_2$ . Здесь все точки прямой  $y_2 = 0$  являются положениями равновесия, и каждая из прямых  $y_2 = C_2$  – фазовая траектория. Движение по ним при  $t \rightarrow +\infty$  идет справа налево при  $C_2 < 0$  и слева направо при  $C_2 > 0$ .

Наконец, в третьем случае каждая точка фазовой плоскости есть особая точка – положение равновесия.

Важно отметить, что для рассматриваемых здесь случаев, изменения коэффициентов или добавления к правым частям слагаемых, малых по сравнению с линейными, может радикально изменить фазовый портрет.